

EREMIA GEORGESCU-BUZAU
EUGEN ONOFRAȘ

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ ÎN LICEU

EREMIA GEORGESCU-BUZĂU
EUGEN ONOFRĂȘ

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ ÎN LICEU



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1983

PREFATA

Pentru viitorul matematician sau pentru cel care, pregătindu-se pentru alte domenii de activitate, dorește să utilizeze cunoștințele de matematică drept mijloc de investigație, perioada de formare presupune, printre altele, rezolvarea a cât mai multe probleme.

Evident, stabilirea capitolelor din care trebuie să se lucreze, ordinea în care acestea trebuie parcurse, indicarea celor mai reprezentative probleme (avem în vedere partea teoretică la care se face apel pentru rezolvare) din fiecare capitol, cât și asigurarea numărului minim de probleme ce trebuie rezolvate sînt sarcini care revin celor care dirijează activitatea de pregătire.

În matematică, ca și în celelalte științe, nu există chei universale, motiv pentru care prin „metode de rezolvare a problemelor” nu se poate înțelege prezentarea unui rețetar absolut, care să asigure soluționarea tuturor problemelor de matematică pe baza unor formule cunoscute sau algoritmi prestabiliți. Lucrarea de față se referă numai la unele capitole din matematica de liceu, autorii intenționînd, pe baza experienței lor didactice, să prezinte :

- probleme reprezentative din fiecare capitol, care să asigure aplicarea a cât mai multe din cunoștințele incluse în capitolul respectiv ;
- metodele de rezolvare pentru problemele respective ;
- posibilități de generalizare a acestor metode la varietăți mai largi de probleme.

Pentru rezolvarea problemelor prezentate, se face apel la cunoștințele de matematică însușite în învățămîntul liceal. În cazurile în care se fac referiri și la cunoștințe care nu sînt incluse în programele de liceu, se dau informațiile teoretice necesare.

Capitolele I, II și III sînt prezentate de lector universitar Eremia Georgescu-Buzău, capitolele IV și V sînt prezentate de profesor Eugen Onofraș.

AUTORII

CAPITOLUL I

ELEMENTE DE LOGICĂ

§ 1. PROPOZIȚII. OPERAȚII CU PROPOZIȚII

În acest paragraf presupunem cunoscută noțiunea de *propoziție* (manualul de algebră pentru clasa a IX-a). O propoziție p poate fi *adevărată* și în acest caz spunem că are valoarea de adevăr 1 sau *falsă* și în acest caz spunem că are valoarea de adevăr 0.

1. **Negația** propoziției p va fi notată cu oricare din simbolurile următoare \bar{p} , $\neg p$, non p . Între p și \bar{p} există următoarea corespondență :

| p | \bar{p} |
|-----|-----------|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

2. **Disjuncția.** Propoziția „ p sau q ” poartă numele de *disjuncția* între propoziția p și propoziția q și se notează cu „ $p \vee q$ ”.

Propoziția „ $p \vee q$ ” este adevărată dacă cel puțin una dintre propozițiile p și q este adevărată și falsă, dacă ambele propoziții sînt false.

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

3. **Conjuncția.** Propoziția „ p și q ” poartă numele de *conjuncția* între propoziția p și propoziția q și se notează cu „ $p \wedge q$ ”.

Propoziția $p \wedge q$ este adevărată dacă ambele propoziții p și q sunt adevărate și falsă în celelalte cazuri.

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

4. **Implicația.** Propoziția „dacă p , atunci q ” poartă numele de *implicație* avînd ca ipoteză (premisă) propoziția p și concluzie propoziția q și se notează cu „ $p \rightarrow q$ ”.

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |

5. **Echivalența logică.** Propoziția „dacă p , atunci q și dacă q atunci p ” poartă numele de *echivalența logică* între propozițiile p și q și se notează cu „ $p \leftrightarrow q$ ” sau „ $p \equiv q$ ”. Propoziția $p \leftrightarrow q$ este adevărată dacă propozițiile p și q au aceeași valoare de adevăr și este falsă dacă propozițiile p și q au valorile de adevăr diferite.

Dacă propoziția $p \leftrightarrow q$ este adevărată se spune că propozițiile p și q sînt echivalente.

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |

Pentru rezolvarea problemelor din acest paragraf sînt utile următoarele *propoziții adevărate*. Se va nota cu f , respectiv a , o propoziție falsă, respectiv adevărată.

| | |
|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $P_1. (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ | $P'_1. (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ |
| $P_2. p \vee q \equiv q \vee p$ | $P'_2. p \wedge q \equiv q \wedge p$ |
| $P_3. p \vee p \equiv p$ | $P'_3. p \wedge p \equiv p$ |
| $P_4. p \vee (p \wedge q) \equiv p$ | $P'_4. p \wedge (p \vee q) \equiv p$ |
| $P_5. p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $P'_5. p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
| $P_6. p \vee f \equiv p$ | $P'_6. p \wedge f \equiv f$ |
| $P_7. p \vee a \equiv a$ | $P'_7. p \wedge a \equiv p$ |
| $P_8. p \vee \bar{p} \equiv a$ | $P'_8. p \wedge \bar{p} \equiv f$ |
| $P_9. \overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$ | $P'_9. \overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$ |
| $P_{10}. \bar{\bar{p}} \equiv p$ | |

Justificarea acestor proprietăți se face cu tabele de adevăr. Vom da ca model demonstrațiile propozițiilor P_6 , P_7 , P'_5 și P_9 .

Demonstrația proprietăților P_6 și P_7

| p | f | $p \vee f$ |
|-----|-----|------------|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | a | $p \vee a$ |
|-----|-----|------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

Se observă că propozițiile p și $p \vee f$, respectiv propozițiile a și $p \vee a$ au aceeași valoare de adevăr și deci sînt echivalente.

Demonstrația proprietății P'_5

| p | q | r | $q \vee r$ | $p \wedge (q \vee r)$ | $p \wedge q$ | $p \wedge r$ | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
|-----|-----|-----|------------|-----------------------|--------------|--------------|----------------------------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Se observă că propozițiile $p \wedge (q \vee r)$ și $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ au aceeași valoare de adevăr și deci sînt echivalente.

Demonstrația proprietății P_8

| p | q | $p \vee q$ | $\overline{p \vee q}$ | \bar{p} | \bar{q} | $\bar{p} \wedge \bar{q}$ |
|-----|-----|------------|-----------------------|-----------|-----------|--------------------------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Se observă că propozițiile $\overline{p \vee q}$ și $\bar{p} \wedge \bar{q}$ au aceeași valoare de adevăr și deci sînt echivalente.

Celelalte demonstrații le propunem ca exerciții cititorilor.

§ 2. CÎTEVA PROPRIETĂȚI UZUALE PRIVIND CALCULUL CU PROPOZIȚII

P_{11} . Reducerea implicației la disjuncție și negație. Următoarea propoziție este adevărată:

$(p \rightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q)$. Demonstrația se face cu tabel de adevăr după modelul precedent.

P_{12} . Următoarea propoziție este adevărată:

$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Demonstrația se face cu tabel de adevăr.

P_{13} . Următoarea propoziție este adevărată:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p).$$

Demonstrația rezultă din aplicarea proprietăților P_{11} și P_{12} .

P_{14} . Următoarele propoziții sînt adevărate:

a) $(p \rightarrow q) \equiv (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$

b) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\bar{q} \leftrightarrow \bar{p})$.

Justificarea se face cu ajutorul tabelelor de adevăr.

§ 3. EXERCIIȚII PRIVIND CALCULUL CU PROPOZIȚII

1. Să se arate că:

a) $p \vee q \vee \bar{p} \equiv a$;

b) $(p \vee q) \wedge p \equiv p$;

c) $(p \vee q) \wedge \bar{p} \equiv \bar{p} \wedge q$.

Soluție. a) Avem :

$$\begin{aligned} p \vee q \vee \bar{p} &\equiv \\ &\equiv (p \vee \bar{p}) \vee q \equiv \text{(Propozițiile } P_1 \text{ și } P_2) \\ &\equiv a \vee q \equiv \text{(Propoziția } P_8) \\ &\equiv a \quad \text{(Propoziția } P_7). \end{aligned}$$

b) Avem:

$$\begin{aligned} \overline{(p \vee q)} \wedge p &\equiv \\ &\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \wedge p \equiv \text{(Propoziția } P_9) \\ &\equiv (p \wedge \bar{p}) \wedge \bar{q} \equiv \text{(Propozițiile } P'_1 \text{ și } P'_2) \\ &\equiv f \wedge \bar{q} \equiv \text{(Propoziția } P'_8) \\ &\equiv f \quad \text{(Propoziția } P'_6). \end{aligned}$$

c) Avem :

$$\begin{aligned} \overline{(p \vee q)} \wedge \bar{p} &\equiv \\ &\equiv \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{p} \equiv \text{(Propoziția } P_9) \\ &\equiv \bar{p} \wedge \bar{p} \wedge \bar{q} \equiv \text{(Propozițiile } P'_1 \text{ și } P'_2) \\ &\equiv \bar{p} \wedge \bar{q} \quad \text{(Propoziția } P'_3). \end{aligned}$$

2. Să se scrie cu ajutorul negației, disjuncției și conjuncției propozițiile :

a) $\overline{(p \rightarrow q)} \wedge (p \wedge q)$

b) $\overline{(p \leftrightarrow q)} \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q})$

Soluție. a) Avem :

$$\begin{aligned} \overline{(p \rightarrow q)} \wedge (p \wedge q) &\equiv \\ &\equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (p \wedge q) \equiv \text{(Propoziția } P_{11}) \\ &\equiv \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge p \wedge q \equiv \text{(Propoziția } P_9) \\ &\equiv p \wedge \bar{q} \wedge p \wedge q \equiv \text{(Propoziția } P_{10}) \\ &\equiv (p \wedge p) \wedge (q \wedge \bar{q}) \equiv \text{(Propozițiile } P'_1 \text{ și } P'_2) \\ &\equiv p \wedge f \equiv \text{(Propozițiile } P'_3 \text{ și } P'_8) \\ &\equiv f \quad \text{(Propoziția } P'_6), \end{aligned}$$

b) Avem

$$\begin{aligned} \overline{(p \leftrightarrow q)} \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) &\equiv \\ &\equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv \text{(Propoziția } P_{13}) \\ &\equiv (\bar{p} \vee q \vee \bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv \text{(Propoziția } P'_9) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &\equiv [(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{q} \wedge \bar{p})] \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv && \text{(Propoziția } P_9) \\
 &\equiv [(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p})] \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv && \text{(Propoziția } P_{10}) \\
 &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{p}) \wedge (\bar{q} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv && \text{(Propoziția } P_5) \\
 &\equiv (p \vee q) \wedge a \wedge a \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv && \text{(Propoziția } P_8) \\
 &\equiv (p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) && \text{(Propoziția } P_7).
 \end{aligned}$$

§ 4. PREDICATE. OPERAȚII CU PREDICATE. PROPOZIȚII UNIVERSALE. PROPOZIȚII EXISTENȚIALE

Definiția 1. O funcție $p : M \rightarrow L$ unde M este o mulțime nevidă și L mulțimea propozițiilor se numește *predicat* peste mulțimea M . Rezultă că oricare ar fi $x \in M$, $p(x)$ este o propoziție (adevărată sau falsă).

Definiția 2. Fie $p : M \rightarrow L$ un predicat. Predicatul \bar{p} care face ca fiecărui $x \in M$ să-i corespundă propoziția $\bar{p}(x)$ poartă numele de *negația predicatului* p . Se mai notează cu $\text{non } p$, sau $\neg p$.

Definiția 3. Fie $p : M \rightarrow L$ și $q : M \rightarrow L$ două predicate.

- Predicatul $p \vee q : M \rightarrow L$ definit prin relația $(p \vee q)(x) = p(x) \vee q(x)$ poartă numele de *disjuncția* dintre predicatul p și predicatul q .
- Predicatul $p \wedge q : M \rightarrow L$ definit prin relația $(p \wedge q)(x) = p(x) \wedge q(x)$ poartă numele de *conjuncția* dintre predicatul p și predicatul q .
- Predicatul $p \rightarrow q : M \rightarrow L$ definit prin relația $(p \rightarrow q)(x) = p(x) \rightarrow q(x)$ poartă numele de *implicație* avînd ca ipoteză (premiză) predicatul p și concluzie predicatul q .
- Predicatul $p \leftrightarrow q : M \rightarrow L$ definit prin relația $(p \leftrightarrow q)(x) = p(x) \leftrightarrow q(x)$ se numește *echivalența logică* între predicatul p și predicatul q .

Definiția 4. Fie $p : M \rightarrow L$ un predicat.

- Propoziția „Pentru orice $x \in M$ propoziția $p(x)$ este adevărată” poartă numele de *propoziție universală* și se notează cu simbolul $(\forall x)(p(x))$.

Simbolul \forall se citește „oricare” și se numește *cuantificator universal*.

- Propoziția „Există $x \in M$, astfel încît propoziția $p(x)$ este adevărată” poartă numele de *propoziție existențială* și se notează cu simbolul $(\exists x)(p(x))$.

Simbolul \exists se citește „există” și se numește *cuantificator existențial*.

Fie : $p : M \rightarrow L$ și $q : M \rightarrow L$ două predicate.

Propoziția $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ va fi notată astfel :

$$p(x) \Rightarrow q(x).$$

Implicația $p(x) \Rightarrow q(x)$ este adevărată dacă pentru orice x pentru care $p(x)$ este adevărată, avem $q(x)$ adevărată (în celelalte cazuri ipoteza $p(x)$ este falsă și deci implicația este adevărată).

Propoziția $(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$ va fi notată astfel :

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

Următoarele propoziții sînt echivalente :

- $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.
- $p(x) \Rightarrow q(x)$ și $q(x) \Rightarrow p(x)$.
- $p(x)$ și $q(x)$ sînt simultan adevărate, respectiv simultan false.

§ 5. TRANSCRIEREA PROPRIETĂȚILOR $P_1, \dots, P_9, P'_1, \dots, P'_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}$, din § 1 și § 2 ÎN CAZUL PREDICATELOR

Fie predicatele $p : M \rightarrow L, q : M \rightarrow L, r : M \rightarrow L, f : M \rightarrow L$ și $a : M \rightarrow L$, unde propoziția $f(x)$ este falsă pentru orice $x \in M$, iar $a(x)$ este adevărată pentru orice $x \in M$.

Următoarele propoziții sînt adevărate.

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $P_1. [p(x) \vee q(x)] \vee r(x) \Leftrightarrow p(x) \vee [q(x) \vee r(x)].$ | $P'_1. [p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x) \Leftrightarrow p(x) \wedge [q(x) \wedge r(x)].$ |
| $P_2. p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow q(x) \vee p(x).$ | $P'_2. p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow q(x) \wedge p(x).$ |
| $P_3. p(x) \vee p(x) \Leftrightarrow p(x).$ | $P'_3. p(x) \wedge p(x) \Leftrightarrow p(x).$ |
| $P_4. p(x) \vee [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow p(x).$ | $P'_4. p(x) \wedge [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow p(x).$ |
| $P_5. p(x) \vee q(x) \wedge r(x) \Leftrightarrow [p(x) \vee q(x)] \wedge [p(x) \vee r(x)].$ | $P'_5. p(x) \wedge [q(x) \wedge r(x)] \Leftrightarrow [p(x) \wedge q(x)] \wedge [p(x) \wedge r(x)].$ |
| $P_6. p(x) \vee f(x) \Leftrightarrow p(x).$ | $P'_6. p(x) \wedge f(x) \Leftrightarrow f(x).$ |
| $P_7. p(x) \vee a(x) \Leftrightarrow a(x).$ | $P'_7. p(x) \wedge a(x) \Leftrightarrow p(x).$ |
| $P_8. p(x) \vee \bar{p}(x) \Leftrightarrow a(x).$ | $P'_8. p(x) \wedge \bar{p}(x) \Leftrightarrow f(x).$ |
| $P_9. \overline{p(x) \vee q(x)} \Leftrightarrow \bar{p}(x) \wedge \bar{q}(x).$ | $P'_9. \overline{p(x) \wedge q(x)} \Leftrightarrow \bar{p}(x) \vee \bar{q}(x).$ |
| $P_{10}. \bar{\bar{p}}(x) \Leftrightarrow p(x).$ | |

$$P_{11}. (p(x) \rightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\bar{p}(x) \vee q(x)).$$

$$P_{12}. (p(x) \leftrightarrow q(x)) \Leftrightarrow (p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow p(x)).$$

$$P_{13}. (p(x)) \leftrightarrow q(x) \Leftrightarrow (\bar{p}(x) \vee q(x)) \wedge ((\bar{q}(x) \vee p(x))).$$

$$P_{14}. a) (p(x) \rightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\bar{q}(x) \rightarrow \bar{p}(x)).$$

$$b) (p(x) \leftrightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\bar{q}(x) \leftrightarrow \bar{p}(x)).$$

Reamintim că simbolul \Leftrightarrow se utilizează pentru notarea unor propoziții universale. De exemplu: proprietatea P_4 , trebuie interpretată ca propoziția $(\forall x)[(p(x) \vee (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow p(x)]$.

§ 6. PROPOZIȚII CUANTIFICATE. EXERCITII

O propoziție scrisă cu ajutorul simbolurilor $\forall, \exists, \vee, \wedge, \rightarrow, \Leftrightarrow$ se spune că este scrisă cuantificată. Precizăm că în scrierea cuantificată nu se trec mulțimile din care fac parte variabilele.

Exerciții

I. Să se precizeze care dintre propozițiile următoare este adevărată sau falsă și să se scrie cuantificat.

Fie $x \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{R}$ și următoarele propoziții:

1. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, avem $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Propoziția este adevărată căci $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Scriere cuantificată: $(\forall x)(x^2 - 4x + 5 > 0)$.

2. Există $x \in \mathbb{R}$, astfel încît $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Propoziția este adevărată căci dacă $x = 1$, avem $1^2 - 3 + 2 = 0$. Scriere cuantificată: $(\exists x)(x^2 - 3x + 2 = 0)$.

3. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ avem $x^2 - 3x + 4 < 0$.

Propoziția este falsă căci pentru $x = 0$, avem $4 > 0$.

Scrierea cuantificată: $(\forall x)(x^2 - 3x + 4 < 0)$.

4. Există $x \in \mathbb{R}$, astfel încît $x^2 + x + 1 = 0$.

Propoziția este falsă căci ecuația $x^2 + x + 1 = 0$ nu are rădăcini reale.

Scrierea cuantificată: $(\exists x)(x^2 + x + 1 = 0)$.

5. a) Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, există $y \in \mathbb{R}$, astfel încît $x + y = 2$.

b) Există $x \in \mathbb{R}$, astfel încît oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$, avem $x + y = 2$.

a) Propoziția este adevărată căci pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $y \in \mathbb{R}$ și anume $y = 2 - x$ care verifică ecuația $x + y = 2$.

Scrierea cuantificată: $(\forall x)(\exists y)(x + y = 2)$.

b) Propoziția este falsă căci nu există $x \in \mathbb{R}$, astfel încît egalitatea $x + y = 2$ să fie adevărată pentru orice y .

Scrierea cuantificată: $(\exists x)(\forall y)(x + y = 2)$.

Observație. Exercițiul 5 pune în evidență faptul că nu este permisă permutarea cuantificatorilor \forall și \exists .

II. 6. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Să se scrie cuantificat propozițiile:

a) Oricare ar fi $x_1 \in A$ și oricare ar fi $x_2 \in A$, astfel încît $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$ (definiția funcției injective; manualul de algebră pentru clasa a IX-a).

b) Oricare ar fi $y \in B$, există $x \in A$ astfel încît $y = f(x)$ (definiția funcției surjective; manualul de algebră pentru clasa a IX-a).

a) $\forall (x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ sau $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) $(\forall y)(\exists x)(y = f(x))$.

7. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție numerică și $I \subseteq A$. Să se cuantifice următoarea propoziție:

Oricare ar fi $x_1 \in I$ și $x_2 \in I$, astfel încît $x_1 \leq x_2$, avem $f(x_1) \leq f(x_2)$.
(definiția funcției crescătoare, manualul de algebră pentru clasa a IX-a).

Scrierea cuantificată:

$\forall (x_1, x_2)(x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$ sau $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

8. Fie următoarele variabile: $n \in \mathbb{N}$, $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir de numere reale, $a \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$. Să se scrie cuantificat următoarele propoziții:

a) Există $a \in \mathbb{R}$, astfel încît oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încît oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$, avem $|a_n - a| < \varepsilon$ (definiția cu ε a convergenței, manualul de analiză pentru clasa a XI-a).

b) Există $M \in \mathbb{R}$, astfel încît oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ avem $|a_n| < M$ (definiția șirului mărginit, manualul de analiză pentru clasa a XI-a).

a) $(\exists a)(\forall \varepsilon)(\exists N_{(\varepsilon)})(\forall n)(n > N(\varepsilon) \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$.

b) $(\exists M)(\forall n)(|a_n| < M)$.

9. Fie \mathcal{V}_a mulțimea vecinătăților punctului $a \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita a și scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dacă:

Oricare ar fi $V_a \in \mathcal{V}_a$, există $L \in \mathbb{N}$ astfel încît oricare ar fi $n > L$, $a_n \in V_a$. Să se scrie cuantificat această propoziție.

$(\forall V_a)(\exists L)(\forall n)(n > L \rightarrow a_n \in V_a)$.

10. Fie G o mulțime pe care este definită o lege de compoziție internă notată multiplicativ, $e \in G$, $x \in G$, $y \in G$, $z \in G$, $x' \in G$. Să se scrie cuantificat propozițiile:

a) Oricare ar fi x, y, z , avem: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (proprietatea de asociativitate).

c) Există $e \in G$, astfel încît oricare ar fi $x \in G$, avem $e \cdot x = x$ și $x \cdot e = x$ (existența elementului neutru).

d) Pentru orice $x \in G$, există $x' \in G$, astfel încît $x' \cdot x = e$ și $x \cdot x' = e$ (orice element este simetrizabil; în ipoteza că propoziția (c) este adevărată). (Propozițiile a), b), c), d), constituie definiția grupului abelian în notație multiplicativă; manualul de algebră pentru clasa a XII-a).

a) $\forall (x, y, z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

b) $\forall (x, y)(x \cdot y = y \cdot x)$

c) $(\exists e)(\forall x)(ex = x \wedge xe = x)$

d) $(\forall x)(\exists x')(x' \cdot x = e \wedge x \cdot x' = e)$

§ 7. REGULI DE NEGARE. EXERCITII

Fie $p : M \rightarrow L$ și $q : M \rightarrow L$ două predicate și $x \in M$.

1. Negarea propozițiilor universale

Negația propoziției „orice $x \in M$ are proprietatea $p(x)$ ” este propoziția „există $x \in M$, cu proprietatea $\bar{p}(x)$ ”. Scrierea cuantificată :

$$(\forall x)(\overline{p(x)}) \leftrightarrow (\exists x)(\bar{p}(x)).$$

2. Negarea proprietăților existențiale

Negația propoziției „există $x \in M$ cu proprietatea $p(x)$ ” este propoziția „orice $x \in M$ are proprietatea $\bar{p}(x)$ ”. Scrierea cuantificată :

$$(\exists x)(\overline{p(x)}) \leftrightarrow (\forall x)(\bar{p}(x)).$$

3. Negarea disjuncției

Negarea disjuncției se face pe baza proprietății P_9 din § 5.

$$\overline{p(x) \vee q(x)} \leftrightarrow \overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}.$$

4. Negarea conjuncției

Negarea conjuncției se face pe baza proprietății P'_9 din § 5.

$$\overline{p(x) \wedge q(x)} \leftrightarrow \bar{p}(x) \vee \bar{q}(x).$$

5. *Rezumat.* Prin negare, proprietățile $p(x)$, $q(x)$ etc. se transformă în $\bar{p}(x)$, $\bar{q}(x)$ etc., „oricare” se transformă în „există”, „există” se transformă în „oricare”, „sau” se transformă în „și”, iar „și” se transformă în „sau”.

6. Negarea implicației

Negarea implicației se bazează pe proprietatea P_{11} § 2, ($p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$), pe proprietatea P_{10} , § 1, ($\bar{\bar{p}} = p$) și pe negarea disjuncției.

Avem :

$$\begin{aligned} \overline{p \rightarrow q} &\leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee q} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} \leftrightarrow p \wedge \bar{q}. \end{aligned}$$

Deci propoziția $p \rightarrow q$ se neagă prin propoziția $p \wedge \bar{q}$ (se realizează ipoteza p , dar nu se realizează concluzia q).

7. Exerciții

1) Fie $x \in \mathbf{R}$ și $y \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$. Să se nege următoarele propoziții :

| | | |
|-------------------|---------------------------|-----------------------------------------------|
| $p_1 : x = y.$ | $p_4 : x > y.$ | $p_7 : x \in [a, \infty).$ |
| $p_2 : x < y.$ | $p_5 : x \geq y.$ | $p_8 : x \in (1, 3].$ |
| $p_3 : x \leq y.$ | $p_6 : x \in \mathbf{R}.$ | $p_9 : x \notin [2, 4). \quad \blacktriangle$ |

Răspuns :

$$\begin{array}{lll} \bar{p}_1 : x \neq y & \bar{p}_3 : x > y & \bar{p}_5 : x < y \\ \bar{p}_2 : x \geq y & \bar{p}_4 : x \leq y & \bar{p}_6 : x \notin \mathbb{R} \end{array}$$

Avem $p_7 \Leftrightarrow x \geq a$ și deci $\bar{p}_7 : x < a$.

Avem $p_8 \Leftrightarrow (x \leq 3) \wedge (x > 1)$ și deci $\bar{p}_8 : (x > 3) \vee (x \leq 1)$.

Avem $p_9 \Leftrightarrow (x < 2) \vee (x \geq 4)$ și deci $\bar{p}_9 : (x \geq 2) \wedge (x < 4)$.

2. Să se nege propozițiile din § 6, ținându-se seama de scrierea lor cuantificată și apoi să se transcrie enunțul în cuvinte. Să se precizeze valoarea de adevăr a propozițiilor, atunci când e cazul.

1°. Avem $\overline{(\forall x)(x^2 - 4x + 5 > 0)} \Leftrightarrow (\exists x)(x^2 - 4x + 5 \leq 0)$.

Propoziția 1 este adevărată și deci negația sa este falsă.

Enunțul negației : „există $x \in \mathbb{R}$, astfel încît $x^2 - 4x + 5 \leq 0$ ”.

2°. Avem $\overline{(\exists x)(x^2 - 3x + 2 = 0)} \Leftrightarrow (\forall x)(x^2 - 3x + 2 \neq 0)$.

Propoziția (2) este adevărată și deci negația sa este falsă.

Enunțul negației : „pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ”.

3°. Avem $\overline{(\forall x)(x^2 - 3x + 4 < 0)} \Leftrightarrow (\exists x)(x^2 - 3x + 4 \geq 0)$.

Propoziția (3) este falsă și deci negația sa este adevărată.

Enunțul negației : „există $x \in \mathbb{R}$, astfel încît $x^2 - 3x + 4 \geq 0$ ”.

4°. Avem $\overline{(\exists x)(x^2 + x + 1 = 0)} \Leftrightarrow (\forall x)(x^2 + x + 1 \neq 0)$.

Propoziția (4) este falsă și deci negația ei este adevărată.

Enunțul negației : „pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $x^2 + x + 1 \neq 0$ ”.

5°. a) Avem : $\overline{(\forall x)(\exists y)(x + y = 2)} \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(x + y \neq 2)$.

Propoziția (a) este adevărată și deci negația sa este falsă.

Enunțul negației : „există $x \in \mathbb{R}$, astfel încît oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$ avem $x + y \neq 2$ ”.

b) Avem $\overline{(\exists x)(\forall y)(x + y = 2)} \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(x + y \neq 2)$.

Propoziția (b) este falsă și deci negația ei este adevărată.

Enunțul negației : „pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $y \in \mathbb{R}$, astfel încît $x + y \neq 2$ ”.

6°. a) Avem $\overline{\forall(x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists(x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)).$$

Enunțul negației : (funcție neinjectivă) „Există $x_1 \in A$ și $x_2 \in A$ astfel încît $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$ ”.

b) Avem $\overline{(\forall y)(\exists x)(y = f(x))} \Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(y \neq f(x))$.

Enunțul negației (funcție nesurjectivă) : „există $y \in B$, astfel încît oricare ar fi $x \in A$, avem $y \neq f(x)$ ”.

7°. Avem $\overline{(\forall (x_1, x_2))(x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow (\exists (x_1, x_2))(x_1 \leq x_2 \wedge f(x_1) > f(x_2)).$$

Enunțul negației (funcție necrescătoare pe I): „există $x_1 \in I$ și $x_2 \in I$ astfel încât $x_1 \leq x_2$ și $f(x_1) > f(x_2)$ ”.

8°. a) Avem: $\overline{(\exists a)(\forall \varepsilon)(\exists N(\varepsilon))(\forall n)(n > N(\varepsilon) \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow (\forall a)(\exists \varepsilon)(\forall N(\varepsilon))(\exists n)(n > N(\varepsilon) \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon)$$

Enunțul negației (șir divergent): „oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât oricare ar fi numărul natural $N(\varepsilon)$, există un număr natural n , cu proprietatea că $n > N(\varepsilon)$ și $|a_n - a| \geq \varepsilon$.”

b) Avem $\overline{(\exists M)(\forall n)(a_n < M)} \leftrightarrow (\forall M)(\exists n)(|a_n| \geq M)$.

Enunțul negației (șir nemărginit): „oricare ar fi $M > 0$, există un număr natural n , astfel încât $|a_n| \geq M$ ”.

9°. Avem: $\overline{(\forall V_a)(\exists L)(\forall n)(n > L \rightarrow a_n \in V_a)} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow (\exists V_a)(\forall L)(\exists n)(n > L \wedge a_n \notin V_a).$$

Enunțul negației (șir care nu are limita a): „există o vecinătate V_a a lui $a \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice număr natural L , există un număr natural n cu proprietatea că $n > L$ și $a_n \notin V_a$ ”.

10°. a) Avem: $\overline{\forall (x, y, z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \exists (x, y, z)((x \cdot y) \cdot z \neq x \cdot (y \cdot z)).$$

Enunțul negației (lege de compoziție internă neasociativă): „există $x \in G$, $y \in G$, $z \in G$, astfel încât $(x \cdot y) \cdot z \neq x \cdot (y \cdot z)$ ”.

b) Avem: $\overline{\forall (x, y)(x \cdot y = y \cdot x)} \leftrightarrow \exists (x, y)(x \cdot y \neq y \cdot x)$.

Enunțul negației (lege de compoziție internă necomutativă): „există $x \in G$ și $y \in G$ astfel încât $x \cdot y \neq y \cdot x$ ”.

c) Avem: $\overline{(\exists e)(\forall x)(e \cdot x = x \wedge x \cdot e = x)} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow (\forall e)(\exists x)(e \cdot x \neq x \vee x \cdot e \neq x).$$

Enunțul negației (lipsa elementului neutru): „oricare ar fi $e \in G$, există $x \in G$, astfel încât $e \cdot x \neq x$ sau $x \cdot e \neq x$ ”.

d) Avem: $\overline{(\forall x)(\exists x')(x' \cdot x = e \wedge x \cdot x' = e)} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow (\exists x)(\forall x')(x' \cdot x \neq e \vee x \cdot x' \neq e).$$

Enunțul negației: „există $x \in G$, astfel încât oricare ar fi $x' \in G$, avem $x' \cdot x \neq e$ sau $x \cdot x' \neq e$ ”.

CAPITOLUL II

ELEMENTE DE TEORIA MULTIMILOR

În acest capitol presupunem cunoscute principalele operații cu mulțimi tratate în manualul de algebră pentru clasa a IX-a.

§ 1. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PE BAZA PROPRIETĂȚILOR CALCULULUI CU PROPOZIȚII

I. În acest paragraf vor fi folosite în mod special propozițiile $P_1, \dots, P_{10}, P'_1, \dots, P'_9$ din § 1, respectiv § 5, capitolul I. Reamintim că prin notația $p(x) \Rightarrow q(x)$, respectiv $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, înțelegem propoziția $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$, respectiv, $(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$.

Vor fi necesare următoarele proprietăți:

Fie M o mulțime, A și B părți (submulțimii ale mulțimii M) și $x \in M$.

M₁. Următoarele propoziții sînt echivalente:

a) $A \subseteq B$.

b) $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Observație. Notația (b) este o scriere convențională pentru propoziția b') $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$.

M₂. Următoarele propoziții sînt echivalente.

a) $A = B$.

b) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

c) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$.

d) $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Observație. Notațiile c) și d) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor:

c') $(\forall x)((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$.

d') $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

M₃. Ținînd seama că $A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$ (reuniunea dintre mulțimea A și B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente:

a) $x \in A \cup B$.

b) $(x \in A) \vee (x \in B)$.



Observație : Notățiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor :

$$a') (\forall x)(x \in A \cup B).$$

$$b') (\forall x)((x \in A) \vee (x \in B)).$$

M_4 . Ținînd seama că $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ (intersecția dintre mulțimea A și mulțimea B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente.

$$a) x \in A \cap B.$$

$$b) (x \in A) \wedge (x \in B).$$

Observație : Notățiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor :

$$a') (\forall x)(x \in A \cap B).$$

$$b') (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B)).$$

M_5 . Ținînd seama că $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ (diferența dintre mulțimea A și mulțimea B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente.

$$a) x \in A - B.$$

$$b) (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

Observație : Notățiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor :

$$a') (\forall x)(x \in A - B).$$

$$b') (\forall x)((x \in A) \wedge (x \notin B)).$$

M_6 . Ținînd seama că $\bar{A} = C_M A = \{x \mid x \notin A\}$ (complementara mulțimii A în raport cu mulțimea totală M), rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente :

$$a) x \in \bar{A}.$$

$$b) x \notin A.$$

Observație : Notățiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor :

$$a') (\forall x)(x \in \bar{A}).$$

$$b') (\forall x)(x \notin A).$$

M_7 . Ținînd seama că $A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ (produsul cartezian dintre mulțimea A și mulțimea B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente :

$$a) (a, b) \in A \times B.$$

$$b) (a \in A) \wedge (b \in B).$$

II. Exerciții

1. Fie a și b două numere întregi. Să se arate că mulțimea A a divizorilor comuni ai numerelor a și b este egală cu mulțimea B a divizorilor comuni ai numerelor $2a + 3b$ și $a + 2b$.

Soluție. Vom arăta că $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

Fie $x \in A$. Există $q_1 \in \mathbb{Z}$ și $q_2 \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = q_1x$ și $b = q_2x$. Avem $2a + 3b = (2q_1 + 3q_2)x$ și $a + 2b = (q_1 + 2q_2)x$ și deci $x \in B$. Rezultă $A \subseteq B$.

Fie $x \in B$. Există $r_1 \in \mathbb{Z}$ și $r_2 \in \mathbb{Z}$, astfel încât $2a + 3b = r_1x$ și $a + 2b = r_2x$. Rezolvând sistemul:
$$\begin{cases} 2a + 3b = r_1x \\ a + 2b = r_2x \end{cases}$$
 în raport cu necunoscutele a și b obținem $a = (2r_1 - 3r_2)x$ și $b = (2r_2 - r_1)x$, adică x este un divizor comun al numerelor a și b și deci $x \in A$. Rezultă $B \subseteq A$.

Din $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$ deducem $A = B$.

2. Fie A și B părți ale unei mulțimi M . Să se arate că următoarele propoziții sînt echivalente:

- a) $A \subseteq B$.
- b) $A \cup B = B$.
- c) $A \cap B = A$.

Soluție. Se va arăta că a) \Leftrightarrow b) și a) \Leftrightarrow c).

Fie $A \subseteq B$ și $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$, ținînd seama că $A \subseteq B$, rezultă $x \in B$. Așadar, $A \cup B \subseteq B$. Incluziunea $B \subseteq A \cup B$ este evidentă. Deducem: $A \cup B = B$ și deci a) \Rightarrow b).

Fie $A \cup B = B$ și $x \in A$. Rezultă $x \in A \cup B$, adică $x \in B$ și deci $A \subseteq B$, adică b) \Rightarrow a).

Din a) \Rightarrow b) și b) \Rightarrow a), deducem a) \Leftrightarrow b).

Echivalența a) \Leftrightarrow c) se va demonstra în mod analog.

3. Fie A, B, C trei părți ale unei mulțimi M . Să se arate că dacă:

- a) $A \cup B = A \cup C$.
- b) $A \cap B = A \cap C$, atunci $B = C$.

Soluție. Dacă $x \in B$, atunci $x \in A \cup B$ și conform relației a) $x \in A \cup C$, adică $x \in A$ sau $x \in C$.

În cazul $x \in A$, ținînd seamă că $x \in B$, deducem $x \in A \cap B$ și aplicînd relația b) rezultă $x \in A \cap C$, adică $x \in A$ și $x \in C$.

Așadar, în toate cazurile dacă $x \in B$, atunci $x \in C$. Rezultă $B \subseteq C$.

Dacă $x \in C$, atunci $x \in A \cup C$ și conform relației a) $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$.

Dacă $x \in A$, ținînd seama că $x \in C$, rezultă $x \in A \cap C$ și aplicînd relația b), deducem $x \in A \cap B$, adică $x \in A$ și $x \in B$.

Așadar, în toate cazurile dacă $x \in C$, atunci $x \in B$. Rezultă $C \subseteq B$.

Incluziunile $B \subseteq C$ și $C \subseteq B$ demonstrează că $B = C$.

Observație : Notățiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor :

$$a') (\forall x)(x \in A \cup B).$$

$$b') (\forall x)((x \in A) \vee (x \in B)).$$

M_4 . Ținînd seama că $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ (intersecția dintre mulțimea A și mulțimea B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente.

$$a) x \in A \cap B.$$

$$b) (x \in A) \wedge (x \in B).$$

Observație : Notățiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor :

$$a') (\forall x)(x \in A \cap B).$$

$$b') (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B)).$$

M_5 . Ținînd seama că $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ (diferența dintre mulțimea A și mulțimea B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente.

$$a) x \in A - B.$$

$$b) (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

Observație : Notățiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor :

$$a') (\forall x)(x \in A - B).$$

$$b') (\forall x)((x \in A) \wedge (x \notin B)).$$

M_6 . Ținînd seama că $\bar{A} = C_M A = \{x \mid x \notin A\}$ (complementara mulțimii A în raport cu mulțimea totală M), rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente :

$$a) x \in \bar{A}.$$

$$b) x \notin A.$$

Observație : Notățiile a) și b) sînt scrieri convenționale ale propozițiilor :

$$a') (\forall x)(x \in \bar{A}).$$

$$b') (\forall x)(x \notin A).$$

M_7 . Ținînd seama că $A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ (produsul cartezian dintre mulțimea A și mulțimea B) rezultă că următoarele propoziții sînt echivalente :

$$a) (a, b) \in A \times B.$$

$$b) (a \in A) \wedge (b \in B).$$

II. Exerciții

1. Fie a și b două numere întregi. Să se arate că mulțimea A a divizorilor comuni ai numerelor a și b este egală cu mulțimea B a divizorilor comuni ai numerelor $2a + 3b$ și $a + 2b$.

Soluție. Vom arăta că $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

Fie $x \in A$. Există $q_1 \in \mathbb{Z}$ $q_2 \in \mathbb{Z}$, astfel încît $a = q_1x$ și $b = q_2x$. Avem $2a + 3b = (2q_1 + 3q_2)x$ și $a + 2b = (q_1 + 2q_2)x$ și deci $x \in B$. Rezultă $A \subseteq B$.

Fie $x \in B$. Există $r_1 \in \mathbb{Z}$ și $r_2 \in \mathbb{Z}$, astfel încît $2a + 3b = r_1x$ și $a + 2b = r_2x$. Rezolvînd sistemul:
$$\begin{cases} 2a + 3b = r_1x \\ a + 2b = r_2x \end{cases}$$
 în raport cu necunoscutele a și b obținem $a = (2r_1 - 3r_2)x$ și $b = (2r_2 - r_1)x$, adică x este un divizor comun al numerelor a și b și deci $x \in A$. Rezultă $B \subseteq A$.

Din $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$ deducem $A = B$.

2. Fie A și B părți ale unei mulțimi M . Să se arate că următoarele propoziții sînt echivalente:

- a) $A \subseteq B$.
- b) $A \cup B = B$.
- c) $A \cap B = A$.

Soluție. Se va arăta că a) \Leftrightarrow b) și a) \Leftrightarrow c).

Fie $A \subseteq B$ și $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$, ținînd seama că $A \subseteq B$, rezultă $x \in B$. Așadar, $A \cup B \subseteq B$. Includiunea $B \subseteq A \cup B$ este evidentă. Deducem: $A \cup B = B$ și deci a) \Rightarrow b).

Fie $A \cup B = B$ și $x \in A$. Rezultă $x \in A \cup B$, adică $x \in B$ și deci $A \subseteq B$, adică b) \Rightarrow a).

Din a) \Rightarrow b) și b) \Rightarrow a), deducem a) \Leftrightarrow b).

Echivalența a) \Leftrightarrow c) se va demonstra în mod analog.

3. Fie A, B, C trei părți ale unei mulțimi M . Să se arate că dacă:

- a) $A \cup B = A \cup C$.
- b) $A \cap B = A \cap C$, atunci $B = C$.

Soluție. Dacă $x \in B$, atunci $x \in A \cup B$ și conform relației a) $x \in A \cup C$, adică $x \in A$ sau $x \in C$.

În cazul $x \in A$, ținînd seamă că $x \in B$, deducem $x \in A \cap B$ și aplicînd relația b) rezultă $x \in A \cap C$, adică $x \in A$ și $x \in C$.

Așadar, în toate cazurile dacă $x \in B$, atunci $x \in C$. Rezultă $B \subseteq C$.

Dacă $x \in C$, atunci $x \in A \cup C$ și conform relației a) $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$.

Dacă $x \in A$, ținînd seama că $x \in C$, rezultă $x \in A \cap C$ și aplicînd relația b), deducem $x \in A \cap B$, adică $x \in A$ și $x \in B$.

Așadar, în toate cazurile dacă $x \in C$, atunci $x \in B$. Rezultă $C \subseteq B$.

Includiunile $B \subseteq C$ și $C \subseteq B$ demonstrează că $B = C$.

4. Fie A și B două părți ale unei mulțimi M . Să se arate că dacă $A \cup B = A \cap B$, atunci $A = B$.

Soluție. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup B$ și $x \in A \cap B$, adică $x \in A$ și $x \in B$. Deci dacă $x \in A$, atunci $x \in B$. Rezultă $A \subseteq B$.

În mod analog se demonstrează incluziunea $B \subseteq A$ și deci egalitatea $A = B$.

5. Fie A, B părți ale unei mulțimi M și $x \in M$. Să se neghe propozițiile :

- a) $x \in A \cup B$. c) $x \in A - B$. e) $A = B$.
b) $x \in A \cap B$. d) $A \subseteq B$. f) $(x, y) \in A \times B$.

Soluție. a) Ținând seama că $x \in A \cup B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \vee (x \in B))$, avem: $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (\exists x)((x \notin A) \wedge (x \notin B))$.

Această relație va fi scrisă convențional astfel: $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$.

b) Ținând seama că $x \in A \cap B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B))$, avem $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (\exists x)((x \notin A) \vee (x \notin B))$.

Această relație va fi scrisă convențional astfel $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$.

c) Ținând seama că $x \in A - B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \wedge (x \notin B))$ avem $x \notin A - B \Leftrightarrow (\exists x)((x \notin A) \vee (x \in B))$.

Această relație va fi scrisă convențional astfel: $x \notin A - B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \in B)$.

d) Ținând seama că propoziția $A \subseteq B$ este echivalentă cu propoziția $(\forall x)((x \in A) \rightarrow (x \in B))$, avem $A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)((x \in A) \wedge (x \notin B))$.

e) Ținând seama că propoziția $A = B$ este echivalentă cu propoziția $(\forall x)((x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge ((x \in B) \rightarrow (x \in A))$ avem $A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))$.

f) Ținând seama că $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B)$, avem $(x, y) \notin A \times B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (y \notin B)$.

6. Fie A, B, C părți ale unei mulțimi M . Să se demonstreze egalitățile :

a) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Soluție. a) Avem: $x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin (B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A - B) - C.$$

Deoarece $x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) - C$, avem $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

b) Avem: $x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cap C) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin B) \vee (x \notin C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \text{ (s-a aplicat proprietatea } P_2^*, \S 1, \text{ capitolul I)}$$

$$\Leftrightarrow (x \in A - B) \vee (x \in A - C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C).$$

Deoarece $x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$, avem egalitatea din enunț.

7. Să se arate că $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Soluție. Avem:

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \\ &\wedge ((y \in B) \vee (y \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (y \in C)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x, y) \in (A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup \\ &\cup (A \times C). \end{aligned}$$

8. Să se arate că $A \times (B - C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$.

Soluție. Avem:

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B - C) &\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B - C) \Rightarrow (x \in A) \wedge \\ &\wedge ((y \in B) \wedge (y \notin C)) \Rightarrow ((x, y) \in A \times B) \wedge ((x, y) \notin (A \times C)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) - (A \times C). \end{aligned}$$

§ 2. STRUCTURA DE ALGEBRĂ BOOLE A MULȚIMII PĂRȚILOR UNEI MULȚIMI. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PE BAZA CALCULULUI ÎNTR-O ALGEBRĂ BOOLE

1. Fie M o mulțime, A, B, C părți ale mulțimii M , \emptyset mulțimea vidă și $x \in M$.

Dacă în propozițiile $P_1, \dots, P_{10}, P'_1, \dots, P'_9$ din § 5, capitolul I, înlocuim predicatul $p(x)$ cu $x \in A$, $q(x)$ cu $x \in B$, $r(x)$ cu $x \in C$, pe $f(x)$ cu predicatul $x \in \emptyset$ (evident fals pentru orice $x \in M$) și pe $a(x)$ cu predicatul $x \in M$ (evident adevărat pentru orice $x \in M$) și dacă ținem seama că relația $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ este echivalentă cu relația $A = B$ între mulțimi, propozițiile P_1, \dots, P_{10} și P'_1, \dots, P'_9 se transformă în egalități de mulțimi.

De exemplu, propoziția $P_1, (p(x) \vee q(x)) \vee r(x) \Leftrightarrow p(x) \vee (q(x) \vee r(x))$, devine $((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C))$, care reprezintă următoarea egalitate de mulțimi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Așadar, propozițiile $P_1, \dots, P_{10}, P'_1, \dots, P'_9$ cu înlocuirile menționate mai înainte se transformă în următoarele egalități de mulțimi. Oricare ar fi părțile A, B, C ale mulțimii M avem :

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $B_1. (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $B'_1. (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| Reuniunea, respectiv intersecția, este asociativă | |
| $B_2. A \cup B = B \cup A$ | $B'_2. A \cap B = B \cap A$ |
| Reuniunea, respectiv intersecția, este comutativă | |
| $B_3. A \cup A = A$ | $B'_3. A \cap A = A$ |
| Reuniunea, respectiv intersecția, are proprietatea de idempotență | |
| $B_4. A \cup (A \cap B) = A$ | $B'_4. A \cap (A \cup B) = A$ |
| Reuniunea, respectiv intersecția, are proprietatea de absorbție | |
| $B_5. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $B'_5. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| Reuniunea, respectiv intersecția, este distributivă față de intersecție, respectiv reuniune | |
| $B_6. A \cup \emptyset = A$ | $B'_6. A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| $B_7. A \cup M = M$ | $B'_7. A \cap M = A$ |
| $B_8. A \cup \bar{A} = M$ | $B'_8. A \cap \bar{A} = \emptyset$ |
| Legea terțiului exclus | Legea contradicției |
| $B_9. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ | $B'_9. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ |
| Legile lui de Morgan | |
| $B_{10}. \bar{\bar{A}} = A$ | |
| Legea dublei negații | |

Proprietățile $B_1, \dots, B_{10}, B'_1, \dots, B'_9$ înzestreaază mulțimea părților mulțimii M cu o structură de *algebră Boole*.

La acestea mai adăugăm următoarele proprietăți evidente :

$$B_{11}. A - B = A \cap \bar{B}.$$

$$B_{12}. A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

În procesul de predare, proprietățile $B_1, B_2, \dots, B_{10}, B'_1, B'_2, \dots, B'_9$ și chiar B_{11} și B_{12} pot fi acceptate ca axiome (deși ele nu sînt independente), eventual justificate cu diagrama Venn-Euler.

Proprietățile B_1 și B_2 , respectiv B'_1 și B'_2 permit ca într-o expresie care conține numai reuniuni, respectiv numai intersecții, să nu mai punem parantezele, scriind mulțimile în orice ordine dorim.

De exemplu, vom scrie :

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cup B \cup C &= \\ &= B \cup A \cup C = \\ &= B \cup C \cup A \text{ etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \\ \text{sau } &= B \cap A \cap C = \\ &= B \cap C \cap A \text{ etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A \cup B \cup C \cup D &= \\ &= B \cup A \cup D \cup C = \\ &= D \cup C \cup B \cup A \text{ etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C \cap D &= \\ \text{sau } &= B \cap A \cap D \cap C = \\ &= D \cap C \cap B \cap A \text{ etc.} \end{aligned}$$

B₁₃. Diferența simetrică. Diferența simetrică dintre mulțimea A și mulțimea B se numește mulțimea: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$.

B₁₄. Consecințe ale proprietății de distributivitate.

Fie A, B, C, D, E, F părți ale unei mulțimi M . Avem :

$$\text{a) } (A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D).$$

$$\text{a') } (A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D).$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (A \cap B) \cup (C \cap D) \cup (E \cap F) &= (A \cup C \cup E) \cap \\ &\cap (A \cup C \cup F) \cap (A \cup D \cup E) \cap (A \cup D \cup F) \cap \\ &\cap (B \cup C \cup E) \cap (B \cup C \cup F) \cap (B \cup D \cup E) \cap \\ &\cap (B \cup D \cup F). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b') } (A \cup B) \cap (C \cup D) \cap (E \cup F) &= (A \cap C \cap E) \cup \\ &\cup (A \cap C \cap F) \cup (A \cap D \cap E) \cup (A \cap D \cap F) \cup \\ &\cup (B \cap C \cap E) \cup (B \cap C \cap F) \cup (B \cap D \cap E) \cup \\ &\cup (B \cap D \cap F). \end{aligned}$$

Demonstrație. a) Avem : $(A \cap B) \cup (C \cap D) = ((A \cap B) \cup C) \cap ((A \cap B) \cup D) = (\text{proprietatea } B_5) = ((A \cup C) \cap (B \cup C)) \cap ((A \cup D) \cap (B \cup D)) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$.

S-a folosit, evident, permanent proprietatea de asociativitate și comutativitate. Celelalte proprietăți se demonstrează analog.

II. Exerciții

1) Fie A, B, C , părți ale unei mulțimi M . Să se arate că :

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C).$$

Soluție. Avem :

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A \cap \overline{(B - C)} = && (\text{Proprietatea } B_{11}) \\ &= A \cap \overline{(B \cap \bar{C})} = && (\text{Proprietatea } B_{11}) \\ &= A \cap (\bar{B} \cup \bar{\bar{C}}) = && (\text{Proprietatea } B_9) \\ &= A \cap (\bar{B} \cup C) = && (\text{Proprietatea } B_{10}) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap C) = && (\text{Proprietatea } B_5) \\ &= (A - B) \cup (A \cap C) && (\text{Proprietatea } B_{11}) \end{aligned}$$

2. Să se demonstreze că dacă $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A}$, atunci $A = B$.

Soluție: Avem:

$$\begin{aligned} A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} &\Leftrightarrow A \cup (A \cap \bar{B}) = A \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = A \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow \quad (\text{Proprietatea } B_1) \\ &\Rightarrow A = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) \Rightarrow (\text{Proprietatea } B_2) \\ &\Rightarrow A = (A \cup B) \cap M \Rightarrow \quad (\text{Proprietatea } B_3) \\ &\Rightarrow A = A \cup B. \quad (\text{Proprietatea } B_7) \end{aligned}$$

Raționând în mod analog deducem:

$$\begin{aligned} A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} &\Rightarrow B \cup (A \cap \bar{B}) = B \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (B \cup A) \cap (B \cup \bar{B}) = B \Rightarrow (A \cup B) \cap M = B \Rightarrow B = A \cup B. \end{aligned}$$

Deci: $A = B = A \cup B$.

Începând de la exercițiul 3 nu vom mai preciza de fiecare dată proprietatea algebrei Boole care se aplică. Propunem cititorului să facă acest lucru.

3) Să se verifice egalitățile:

a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$

b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$

Soluție. Avem:

a) $A - (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ și
 $(A - B) \cap (A - C) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) = A \cap A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}.$

b) $A - (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = (A - B) \cup (A - C).$

4) Fie A, B, C părți ale unei mulțimi M . Să se arate că:

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Soluție. Avem:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap A) \cup \\ &\cup (A \cap C \cap C) \cup (A \cap C \cap A) \cup (B \cap B \cap C) \cup \\ &\cup (B \cap B \cap A) \cup (B \cap C \cap C) \cup (B \cap C \cap A). \end{aligned}$$

Folosind proprietatea de absorbție (și evident asociativitatea și comutativitatea) obținem:

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Soluție. Avem :

a) Egalitatea $A \Delta B = B \Delta A$ rezultă din egalitatea $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})$.

$$\begin{aligned} \text{b) } (A \Delta B) \Delta C &= ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) \Delta C = ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) \cap \bar{C} \cup (C \cap ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}))) \\ &= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap (A \cap \bar{B}) \cup (C \cap (B \cap \bar{A}))) \\ &= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap A \cap \bar{B}) \cup (C \cap B \cap \bar{A}) \\ &= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap A \cap \bar{B}) \cup (C \cap B \cap \bar{A}). \end{aligned}$$

Ținând seama că $\bar{A} \cap A = \emptyset$ și $C \cap \emptyset = \emptyset$ rezultă :

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C).$$

Se observă că expresia lui $(A \Delta B) \Delta C$ rămâne neschimbată dacă se permută literele A , B și C între ele.

Așadar, $(A \Delta B) \Delta C = (B \Delta C) \Delta A$.

Ținând seama de punctul (a), deducem $(B \Delta C) \Delta A = A \Delta (B \Delta C)$ și deci $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

c) Avem $A \cap (B \Delta C) = A \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B})) = (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C)$ și

$$\begin{aligned} (A \cap B) \Delta (A \cap C) &= ((A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}) \cup ((A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)}) \\ &= ((A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})) \cup ((A \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) \\ &= (A \cap B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \\ &= (\emptyset \cap B) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\emptyset \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \\ &= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C). \end{aligned}$$

§ 3. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL FUNCȚIEI CARACTERISTICE

I. Funcția caracteristică. Proprietăți

Fie M o mulțime și A o parte a sa.

Funcția $f_A : M \rightarrow \{0, 1\}$ pentru care $f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A, \\ 0, & \text{dacă } x \notin A, \end{cases}$

se numește funcția caracteristică a mulțimii A .

Menționăm următoarele proprietăți ale funcției caracteristice :

1. $f_{\emptyset}(x) = 0$, oricare ar fi $x \in M$.

Într-adevăr, dacă $x \in M$, atunci cazul $x \in \emptyset$ nu poate avea loc și deci $f_{\emptyset}(x) = 0$, oricare ar fi $x \in M$.

2. $f_M(x) = 1$, oricare ar fi $x \in M$.

Într-adevăr, dacă $x \in M$, atunci cazul $x \notin M$ nu poate avea loc și deci $f_M(x) = 1$, oricare ar fi $x \in M$.

3. $f_A^2(x) = f_A(x)$, oricare ar fi $x \in M$.

Într-adevăr, dacă $x \in A$, atunci $f_A(x) = f_A^2(x) = 1$, iar dacă $x \notin A$, atunci $f_A(x) = f_A^2(x) = 0$.

1. $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$, oricare ar fi $x \in M$.

Pentru demonstrație vom întocmi următorul tabel:

| | | | | | | |
|--------------|--------------|---------------------|-----------------------|--------------|--------------|---------------------------|
| $x \in A$ | $x \in B$ | $x \in A \cap B$ | $f_{A \cap B}(x) = 1$ | $f_A(x) = 1$ | $f_B(x) = 1$ | $f_A(x) \cdot f_B(x) = 1$ |
| $x \in A$ | $x \notin B$ | $x \notin A \cap B$ | $f_{A \cap B}(x) = 0$ | $f_A(x) = 1$ | $f_B(x) = 0$ | $f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$ |
| $x \notin A$ | $x \in B$ | $x \notin A \cap B$ | $f_{A \cap B}(x) = 0$ | $f_A(x) = 0$ | $f_B(x) = 1$ | $f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$ |
| $x \notin A$ | $x \notin B$ | $x \notin A \cap B$ | $f_{A \cap B}(x) = 0$ | $f_A(x) = 0$ | $f_B(x) = 0$ | $f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$ |

Se observă că în toate cazurile $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

5. $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$, oricare ar fi $x \in M$.

Pentru demonstrație vom întocmi următorul tabel:

| | | | | |
|--------------|--------------------|----------------------|--------------|------------------|
| $x \in A$ | $x \notin \bar{A}$ | $f_{\bar{A}}(x) = 0$ | $f_A(x) = 1$ | $1 - f_A(x) = 0$ |
| $x \notin A$ | $x \in \bar{A}$ | $f_{\bar{A}}(x) = 1$ | $f_A(x) = 0$ | $1 - f_A(x) = 1$ |

Se observă că în toate cazurile $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$.

6. $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$, oricare ar fi $x \in M$.

Ținând seama că $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$, deducem $f_{A \cup B}(x) = f_{\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}}(x)$.
Aplicînd proprietatea 5 și 4 rezultă:

$$\begin{aligned} f_{\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}}(x) &= 1 - f_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = 1 - f_{\bar{A}}(x) \cdot f_{\bar{B}}(x) = 1 - (1 - f_A(x))(1 - f_B(x)) = \\ &= f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x). \end{aligned}$$

Deci: $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$.

7. $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (f_A(x) \leq f_B(x))$, oricare ar fi $x \in M$.

Ținînd seama că $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$, deducem: $(A \subseteq B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (f_{A \cap B}(x) = f_A(x)) \Leftrightarrow f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) \Leftrightarrow$$

$$f_A(x)f_B(x) - f_A(x) = 0 \Leftrightarrow ((f_A(x) = 0) \text{ sau } f_B(x) = 1) \Leftrightarrow (f_A(x) \leq f_B(x)).$$

Această proprietate permite să înlocuim demonstrația unei incluziuni, prin demonstrația unei inegalități numerice (inegalitatea între valorile funcțiilor caracteristice ale mulțimilor care intră în incluziune).

8. $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x)$, oricare ar fi $x \in M$.

Într-adevăr,

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow ((f_A(x) \leq f_B(x)) \wedge (f_B(x) \leq f_A(x))) \Leftrightarrow (f_A(x) = f_B(x)).$$

Această proprietate permite să înlocuim demonstrația unei egalități de mulțimi printr-o egalitate numerică (egalitatea între valorile funcțiilor caracteristice ale mulțimilor respective).

9. $f_{A \Delta B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x) \cdot f_B(x)$ oricare ar fi $x \in M$.

Ținând seama că $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$ și aplicînd proprietățile 3, 4, 5 și 6 deducem: $f_{A \Delta B}(x) = f_{A \cap \bar{B}}(x) + f_{B \cap \bar{A}}(x) - f_{A \cap \bar{B}}(x) \cdot f_{B \cap \bar{A}}(x) = f_A(x)(1 - f_B(x)) + f_B(x)(1 - f_A(x)) - f_A(x) \cdot f_B(x)(1 - f_B(x))(1 - f_A(x)) = f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A^2(x) + f_B^2(x) - 2f_A(x)f_B(x) = (f_A(x) - f_B(x))^2$.

Observație. Funcția caracteristică a diferenței simetrice poate fi dată prin următoarea egalitate: $f_{A \Delta B}(x) = |f_A(x) - f_B(x)|$.

Într-adevăr ținînd seama că $f_{A \Delta B}(x) = (f_A(x) - f_B(x))^2$ deducem că:

- a) dacă $f_A(x) < f_B(x)$, atunci $f_A(x) = 0$ și $f_B(x) = 1$ și deci, în acest caz $(f_A(x) - f_B(x))^2 = f_B(x) - f_A(x) = 1$;
- b) dacă $f_A(x) = f_B(x)$, atunci $(f_A(x) - f_B(x))^2 = f_A(x) - f_B(x) = 0$;
- c) dacă $f_A(x) > f_B(x)$, atunci $f_A(x) = 1$ și $f_B(x) = 0$ și deci în acest caz $(f_A(x) - f_B(x))^2 = f_A(x) - f_B(x) = 1$.

II. Exerciții

1. Fie A, B, C părți ale unei mulțimi M . Să se arate că dacă:

- a) $A \cap B = A \cap C$ și
- b) $A \cup B = A \cup C$, atunci $B = C$

Soluție. Din a) rezultă $f_{A \cap B}(x) = f_{A \cap C}(x)$, adică $f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) \cdot f_C(x)$ ($x \in M$).

Din b) rezultă $f_{A \cup B}(x) = f_{A \cup C}(x)$, adică $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) + f_C(x) - f_A(x) \cdot f_C(x)$ ($x \in M$) și deci:

$$f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = f_C(x) - f_A(x) \cdot f_C(x).$$

Ținînd seama că $f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) \cdot f_C(x)$ deducem $f_B(x) = f_C(x)$ pentru orice $x \in M$ și deci $B = C$.

2. Fie A și B părți ale unei mulțimi M . Să se arate că dacă $A \cap B = A \cup B$, atunci $A = B$.

Soluție. Avem $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x) = f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$.

Rezultă $f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$ și deci $f_A^2(x) + f_B^2(x) - 2f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$. Deducem $(f_A(x) - f_B(x))^2 = 0$, adică $f_A(x) = f_B(x)$, pentru orice $x \in M$. Rezultă $A = B$.

3. Fie A, B, C părți ale unei mulțimi M . Să se arate că:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

Soluție. Avem: $f_{A \cap (B \Delta C)}(x) = f_A(x) \cdot f_{B \Delta C}(x) = f_A(x)[f_B(x) + f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x)] = f_A(x)f_B(x) + f_A(x)f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x)f_C(x)$ și $f_{(A \cap B) \Delta (A \cap C)}(x) = f_{A \cap B}(x) + f_{A \cap C}(x) - 2f_{A \cap B}(x) \cdot f_{A \cap C}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x) + f_A(x) \cdot f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x)f_C(x) = f_A(x)f_B(x) + f_A(x)f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x)f_C(x)$.

Rezultă $f_{A \cap (B \Delta C)}(x) = f_{(A \cap B) \Delta (A \cap C)}(x)$, pentru orice $x \in M$ și deci egalitatea din enunț.

§ 4. PROBLEME DE NUMĂRARE

1. Fie M o mulțime finită cu n elemente. Să se arate că mulțimea părților mulțimii M are 2^n elemente.

Soluție. Se știe că numărul submulțimilor cu k elemente ale mulțimii M ($0 \leq k \leq n$) este C_n^k . Așadar, numărul submulțimilor mulțimii M este $\sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$ (s-a aplicat formula binomului lui Newton).

2. Fie A și B două mulțimi finite, prima cu n elemente, a doua cu m elemente. Să se arate că mulțimea $A \times B$ are $n \cdot m$ elemente.

Soluție. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Elementele produsului cartezian $A \times B$ pot fi scrise astfel:

$(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m)$

$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m)$

$\dots \dots \dots$

$(a_n, b_1), (a_n, b_2), \dots, (a_n, b_m)$.

Deoarece avem n rânduri fiecare conținând m elemente (cuple), înseamnă că mulțimea $A \times B$ are $n \cdot m$ elemente.

3. Fie A, B, C trei mulțimi finite. Notăm cu $n(A)$, respectiv $n(B)$, $n(C)$ numărul de elemente al mulțimii A , respectiv B, C .

Să se arate că :

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

b) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$.

Soluție. a) Relația este evidentă căci în $A \cup B$ elementele comune, adică elementele mulțimii $A \cap B$, se numără o singură dată.

b) Aplicând relația a) obținem succesiv $n(A \cup B \cup C) = n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap C \cap B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$.

Observație. Relația a) poate fi generalizată pentru cazul a n mulțimi.

CAPITOLUL III

METODA INDUCȚIEI MATEMATICE

Metoda inducției matematice mai este cunoscută sub denumirea de „*raționamentul prin recurență*” sau „*inducție completă*” sau „*raționamentul din aproape în aproape*”. Această metodă se aplică pentru a demonstra că anumite predicate $P(n)$, unde $n \in \mathbb{N}$, sînt adevărate pentru orice $n \geq a$ ($a \in \mathbb{N}$). Dezavantajul acestei metode constă în faptul că relația care trebuie demonstrată trebuie cunoscută dinainte. Sînt situații cînd prin analiza unor cazuri particulare se „întrezărește” relația dorită. Procesul prin care se deduce această relație poartă numele de inducție (incompletă). Relația nu poate fi acceptată decît pe baza unei demonstrații prin inducție completă. Unele din problemele din acest capitol vor fi tratate în două etape: 1) *inducția*, 2) *demonstrația prin inducție completă*. Vom prezenta *trei variante* ale raționamentului prin inducție completă.

În tot acest capitol vom nota cu $P(n)$ un predicat definit pentru orice $n \geq a$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$). De obicei $a = 0$ sau $a = 1$.

§ 1. VARIANTA 1

(vezi manualul de algebră pentru clasa a X-a).

Fie $P(n)$, $n \geq a$, un predicat.

Dacă

1. *propoziția $P(a)$ este adevărată și*
2. *oricare ar fi $n \geq a$, implicația $P(n) \rightarrow P(n+1)$ este adevărată,*
atunci oricare ar fi $n \geq a$, $P(n)$ este adevărată.

Observație. Etapa (1) poartă numele de etapă de verificare.

Propoziția de la punctul (2) se scrie prescurtat astfel: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ($n \geq a$). Pentru a verifica implicația de la punctul (2) se arată că în toate cazurile în care $P(n)$ este adevărată ($n \geq a$) rezultă că $P(n+1)$ este adevărată (în celelalte cazuri ipoteza este falsă și deci implicația este adevărată).

În practică se raționează astfel :

„Presupunem că $P(n)$ este adevărată. Vom demonstra că și $P(n+1)$ este adevărată”. S-ar părea că se comite un viciu de raționament. Vrem să demonstrăm că $P(n)$ este adevărată și presupunem că $P(n)$ este adevărată. Este numai o aparență, căci în etapa a doua se demonstrează o implicație arătându-se că în cazurile în care, eventual, $P(n)$ este adevărată și $P(n+1)$ este adevărată.

Pentru verificarea implicației de la punctul (2) se exprimă întâi $P(n+1)$, înlocuindu-se n cu $n+1$ și apoi se caută „prelucrări” ale lui $P(n)$, astfel încât din $P(n)$ să rezulte $P(n+1)$. Problemele care urmează vor fi astfel selectate încât să ilustreze cât mai bine tehnica demonstrației prin recurență, fără a fi necesare cunoștințe foarte specializate din alte capitole.

I. Egalități

Menționăm că în problemele în care apar sume al căror număr de termeni depinde de n este foarte important pentru stabilirea lui $P(n)$ și $P(n+1)$ să știm câți termeni are suma corespunzătoare în $P(n)$. În toată această parte $n \in \mathbb{N}$.

Exerciții

1) Să se arate că pentru orice $n \geq 1$ avem :

$$1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soluție. Notăm cu $P(n)$ egalitatea din enunț. Membrul sting al egalității conține n termeni.

Avem : $P(1) : 1^2 = (-1)^0 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2}$, adică $1 = 1$.

$P(1)$ este adevărată.

Avem : $P(n+1) :$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2 = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Fie $P(n)$ adevărată, adică :

$$1^2 - 2^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}. \quad (a)$$

Adunînd în ambii membri ai egalităţii (a) pe $(-1)^n(n+1)^2$ (această adunare este sugerată de forma lui $P(n+1)$), obţinem:

$$\begin{aligned} & 1^2 - 2^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2 = \\ & = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2 = (-1)^{n-1}(n+1) \frac{n}{2} - \\ & - (-1)^{n-1}(n+1)^2 = (-1)^{n-1}(n+1) \frac{(-n-2)}{2} = \\ & = (-1)^{n-1}(n+1) \cdot (-1) \frac{(n+2)}{2} = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}, \text{ adică } P(n+1). \end{aligned}$$

Aşadar, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n .

Soluţie. a) *Inducţia.* Avem:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$

Ni se sugerează propoziţia $P(n)$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

b) *Demonstraţia prin inducţie completă.* Propoziţia $P(1)$ este adevărată.

$$\text{Dacă } A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

3) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n .

Soluție. a) *Inducția.* Avem :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observînd că elementele 1, 3, 6, 10 (din linia întâia și coloana a treia) se pot scrie $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, $3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$, $6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$, $10 = \frac{4 \cdot 5}{2}$ ni se sugerează următoarea propoziție :

$$P(n) : "A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}."$$

b) *Demonstrația prin inducție completă.* Propoziția $P(1)$ este, evident, adevărată.

$$\text{Propoziția } P(n+1) \text{ este } "A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}."$$

Să presupunem că $P(n)$, adică egalitatea :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ este adevărată.}$$

$$\text{Avem } A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

adică $P(n+1)$ și deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

4) Să se afle derivatele de ordinul n ale următoarelor funcții :

(1) $f_1(x) = x^\alpha$; ($x > 0$ și $\alpha \neq 0$)

(2) $f_2(x) = \ln(1+x)$; ($x > -1$)

(3) $f_3(x) = e^{\alpha x}$ ($\alpha \neq 0$).

Soluție. (1) a) Inducția. Avem :

$$f_1'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f_1''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$f_1'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

Ni se sugerează propoziția $P(n): f_1^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

b) Demonstrația prin inducție completă. Propoziția $P(1)$ este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este: $f_1^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}$.

Să presupunem că propoziția $P(n)$, adică egalitatea $f_1^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ este adevărată.

Avem: $f_1^{(n+1)}(x) = [f_1^{(n)}(x)]' = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}$,

adică $P(n+1)$. Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

În mod analog se demonstrează :

$$f_2^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{și} \quad f_3^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

II. Inegalități

Cel mai adesea inegalitățile care se verifică prin metoda inducției complete se prezintă sub formă $a_n \leq b_n P(n)$. Trecerea de la $P(n)$ la $P(n+1)$ se face de obicei în modul următor. Se demonstrează că din $a_n \leq b_n$ rezultă $a_{n+1} \leq c_{n+1}$. Se verifică în continuare că $c_{n+1} \leq b_{n+1}$.

Ținând seama că $a_{n+1} \leq c_{n+1}$, și $c_{n+1} \leq b_{n+1}$, aplicînd proprietatea de tranzitivitate a relației de ordine, rezultă $a_{n+1} \leq b_{n+1}$, adică $P(n+1)$. Considerațiile rămîn valabile dacă se înlocuiește semnul \leq cu semnul $<$, sau semnul \geq , sau semnul $>$.

Exerciții

1) Să se arate că oricare ar fi numărul natural $n \geq 4$, avem $2^n \geq n^2$.

Soluție. Propoziția $P(4)$ este $2^4 \geq 4^2$ și este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Să presupunem că propoziția $P(n)$ este adevărată, adică $2^n \geq n^2$. Înmulțind ambii membri ai acestei inegalități cu 2, obținem $2^{n+1} \geq 2n^2$. Vom demonstra că $2n^2 \geq (n+1)^2$, adică $n^2 - 2n - 1 \geq 0$. Rădăcinile ecuației $n^2 - 2n - 1 = 0$ sînt $n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Cum $n \geq 4$ și $4 > 1 + \sqrt{2}$, rezultă $n > 1 + \sqrt{2}$ și deci n este în afara rădăcinilor. Rezultă $n^2 - 2n - 1 \geq 0$, adică $2n^2 \geq (n+1)^2$. Din $2^{n+1} \geq 2n^2$ și $2n^2 \geq (n+1)^2$, rezultă $2^{n+1} \geq (n+1)^2$, adică $P(n+1)$. Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

2) Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$ avem:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}.$$

Soluție. Propoziția $P(1)$ este $\frac{1}{1!} < \frac{5 \cdot 1 - 2}{2}$ și este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2n+2}.$$

Să presupunem că propoziția $P(n)$, adică inegalitatea din enunț, este adevărată. Adunînd în ambii membri pe $\frac{1}{(n+1)!}$ obținem:

$$(a) \quad \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Vom arăta acum că:

$$(b) \quad \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2n+2}.$$

Inegalitatea (b) este echivalentă cu inegalitățile

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2n} - \frac{5n-2}{2n+2},$$

$$\frac{1}{(n-1)!} < \frac{10n+1}{2},$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{10n+1}{2n(n+1)},$$

$$\frac{1}{(n-1)!} < 5n + \frac{1}{2}.$$

Ultima inegalitate este adevărată căci $\frac{1}{(n-1)!} \leq 1$ (este subunitar sau 1), iar $5n + \frac{1}{2} > 1$ (este supraunitar) și deci inegalitatea (b) este adevărată.

Din (a) și (b), rezultă

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2n+2}, \text{ adică } P(n+1).$$

Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

III. Probleme de divizibilitate

Pentru rezolvarea problemelor de divizibilitate reamintim următoarele propoziții.

D1. Numărul natural $b \neq 0$, divide numărul natural a (se scrie $b \mid a$), dacă există un număr natural k astfel încît $a = bk$.

D2. Fie a, b, d trei numere naturale ($d \neq 0$).

Dacă $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci $d \mid (a \pm b)$.

D3. Fie a, b două numere naturale și p un număr natural prim. Dacă $p \mid ab$, atunci $p \mid a$ sau $p \mid b$.

Exerciții

1) Să se arate că oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, 9 divide pe $4^n + 15n - 1$.

Soluție. Notăm cu $P(n)$ propoziția „ $9 \mid 4^n + 15n - 1$ ”. Aceasta înseamnă că există $k \in \mathbb{N}$, astfel încît $4^n + 15n - 1 = 9k$.

Propoziția $P(1)$ este „ $9 \mid 4 + 15 - 1$ ” și este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este „ $9 \mid 4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ ” adică „ $9 \mid 4^{n+1} + 15n + 14$ ”. Presupunînd $P(n)$ adevărată, deducem $4^n = 9k - 15n + 1$ și ținînd seama că $4^{n+1} + 15n + 14 = 4^n \cdot 4 + 15n + 14$, rezultă:
 $4^{n+1} + 15n + 14 = (9k - 15n + 1)4 + (15n + 14) = 9 \cdot 4k - 45n + 4 + 15n + 14 = 9(4k - 5n + 2)$, adică $4^{n+1} + 15n + 14$ se divide cu 9 și deci avem $P(n+1)$. Așadar, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

2) Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural prim p și oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, $p \mid (n^p - n)$.

Soluție. Vom raționa prin recurență asupra lui n .

Notăm cu $P(n)$ propoziția „ $p \mid (n^p - n)$ ”.

Propoziția $P(1)$ este „ $p \mid (1 - 1)$ ” și este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este „ $p \mid (n+1)^p - (n+1)$ ”.

Să presupunem că $P(n)$ este adevărată. Aceasta înseamnă că există $k \in \mathbb{N}$, astfel încît $n^p - n = kp$.

Avem, (inind seama de formula binomului lui Newton:

$$\begin{aligned}(n+1)^p - (n+1) &= n^p + C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} n + \\ &+ 1 - n - 1 = n^p - n + C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-2} + \dots + \\ &+ C_p^{p-1} n = n^p - n + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^{p-k} = n^p - n + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} n^{p-k}.\end{aligned}$$

Reținem: $1 \leq k < p$.

Numerele C_p^k sînt numere naturale și cum $p > k$, deducem că toți factorii primi ai lui $k!$ sînt mai mici decît p și deci nu divid numărul prim p . Rezultă că numerele $\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k!}$, pe care le vom nota cu α_k sînt numere întregi.

Rezultă:

$$\begin{aligned}(n+1)^p - (n+1) &= n^p - n + p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} n^{p-k} = \\ &= kp + p \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k n^{p-k} = p \left(k + \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k n^{p-k} \right).\end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că $p \mid (n+1)^p - (n+1)$, adică avem $P(n+1)$. Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Observație. Dacă p nu divide pe n (n și p sînt prime între ele) atunci $p \mid (n^{p-1} - 1)$ (Teorema lui Fermat).

Într-adevăr, dacă $p \mid (n^p - n)$, adică $p \mid n(n^{p-1} - 1)$ și $p \nmid n$, atunci $p \mid (n^{p-1} - 1)$.

§ 2. VARIANTA 2

(vezi manualul de algebră pentru clasa a X-a)

Fie $P(n)$, $n \geq a$, un predicat.

Dacă

1. $P(a)$ este adevărată și
 2. oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, astfel încît $a \leq k \leq n$, implicația $P(k) \rightarrow P(n+1)$ este adevărată,
- atunci, oricare ar fi $n \geq a$, $P(n)$ este adevărată.

Exerciții

1) Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care îndeplinesc condițiile:

a) $f(p) = p$, dacă p este prim,

b) $f(nm) = f(n) \cdot f(m)$, oricare ar fi $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. Inducția. Înlocuind în relația (b) pe n cu 1 și pe m cu 1, obținem $f(1) = f^*(1)$. Deoarece $f(1) \neq 0$, rezultă $f(1) = 1$. Ținând seama de (a), deducem $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(5) = 5$ etc.

Folosind (b) obținem $f(4) = f(2) \cdot f(2) = 4$, $f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) \cdot f(3) = 6$.

Ni se sugerează propoziția $P(n): „f(n) = n”$ ($n \geq 1$).

Demonstrația prin inducție completă. Propoziția $P(1)$, adică $f(1) = 1$ este adevărată.

Să presupunem că propoziția $P(k)$, adică $f(k) = k$, este adevărată oricare ar fi k , astfel încât $1 \leq k \leq n$.

Dacă $n + 1$ este prim, atunci $f(n + 1) = n + 1$, adică avem $P(n + 1)$.

Dacă $n + 1$ nu este prim, există $1 < k_1 < n + 1$ și $1 < k_2 < n + 1$, astfel încât $n + 1 = k_1 k_2$. Deoarece $k_1 \leq n$ și $k_2 \leq n$, avem $f(k_1) = k_1$ și $f(k_2) = k_2$ și deci $f(k_1 \cdot k_2) = f(k_1) \cdot f(k_2)$ (condiția (b)). Rezultă $f(n + 1) = k_1 \cdot k_2 = n + 1$, adică $P(n + 1)$. Așadar, implicația $P(k) \rightarrow P(n + 1)$ este adevărată oricare ar fi k , astfel încât $1 \leq k \leq n$.

Demonstrația arată că dacă există o funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, care îndeplinește condițiile a) și b) din enunțul problemei atunci aceasta este funcția $f(n) = n$. Cum această funcție verifică condițiile a) și b), rezultă că singura funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, care verifică aceste condiții este funcția $f(n) = n$.

2) Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, care îndeplinesc condițiile:

a) $f(k_1 \cdot k_2) = f(k_1) \cdot f(k_2)$, pentru orice $k_1 \in \mathbb{N}^*$ și $k_2 \in \mathbb{N}^*$;

b) $k_1 < k_2 \Rightarrow f(k_1) < f(k_2)$;

c) $f(2) = 2$.

Soluție. Inducția. Din condiția a), în care facem $k_1 = 1$ și $k_2 = 1$ obținem $f(1) = f^*(1)$ și cum $f(1) \neq 0$ o deducem $f(1) = 1$. Condiția c) ne dă $f(2) = 2$.

Dacă în condiția a) facem $k_1 = k_2 = 2$ obținem $f(4) = f(2) \cdot f(2) = 4$. Ținând seama de condiția b), avem $2 < 3 < 4$, $f(2) < f(3) < f(4)$, adică $2 < f(3) < 4$. Rezultă $f(3) = 3$.

Ni se sugerează propoziția $P(n): „f(n) = n”$.

Demonstrația prin inducție completă. Propoziția $P(1)$, adică $f(1) = 1$ este adevărată.

Să presupunem că propoziția $P(k)$, adică $f(k) = k$, este adevărată pentru orice k , astfel încât $1 \leq k \leq n$.

Dacă $n + 1$ este par, atunci există k , astfel încît $1 \leq k \leq n$ și $n + 1 = 2k$. Rezultă $f(n + 1) = f(2k) = f(2)f(k) = 2k = n + 1$.

Dacă $n + 1$ este impar, atunci există k , astfel încît $2k < n + 1 < 2k + 2$, adică $n + 1 = 2k + 1$. Deducem că $f(2k) < f(n + 1) < f(2k + 2)$, adică $2k < f(n + 1) < 2k + 2$ și deci $f(n + 1) = 2k + 1 = n + 1$. Așadar implicația $P(k) \rightarrow P(n + 1)$ este adevărată pentru orice k , astfel încît $1 \leq k \leq n$.

§ 3. VARIANTA 3

Fie a și k două numere naturale fixate și $n \in \mathbb{N}$.

Dacă

1. propozițiile $P(a), P(a + 1), \dots, P(a + k)$ sînt adevărate și
2. implicația $P(n) \rightarrow P(n + k)$ este adevărată pentru orice $n \geq a$, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq a$.

Exerciții

- 1) Să se arate că orice număr natural $n \geq 2$, poate fi scris sub forma $n = 2k_1 + 3k_2$, unde $k_1 \in \mathbb{N}$ și $k_2 \in \mathbb{N}$.

Soluție. Notăm cu $P(n)$ propoziția din enunț.

Propozițiile $P(2), P(3), P(4), P(5), P(6)$ sînt adevărate căci:

$$2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \quad (k_1 = 1, k_2 = 0)$$

$$3 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \quad (k_1 = 0, k_2 = 1)$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \quad (k_1 = 2, k_2 = 0)$$

$$5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \quad (k_1 = 1, k_2 = 1)$$

$$6 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \quad (k_1 = 0, k_2 = 2).$$

Vom demonstra în continuare că implicația $P(n) \rightarrow P(n + 5)$ este adevărată pentru orice $n \geq 2$.

Propoziția $P(n + 5)$ este: „ $n + 5 = 2k'_1 + 3k'_2$, unde $k'_1 \in \mathbb{N}$ și $k'_2 \in \mathbb{N}$ ”.

Dacă propoziția $P(n)$ este adevărată, adică $n = 2k_1 + 3k_2$, atunci $n + 5 = 2k_1 + 3k_2 + 5 = 2k_1 + 3k_2 + 2 + 3 = 2(k_1 + 1) + 3(k_2 + 1) = 2k'_1 + 3k'_2$, unde $k'_1 = k_1 + 1$ și $k'_2 = k_2 + 1$. [Deci $P(n) \Rightarrow P(n + 5)$].

- 2) Să se arate că pentru orice număr natural n , există m numere naturale $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ cu proprietatea că $\varepsilon_k \in \{-1; 1\}$ ($1 \leq k \leq m$), astfel că $n = \varepsilon_1 \cdot 1^2 + \varepsilon_2 \cdot 2^2 + \dots + \varepsilon_m \cdot m^2$ (1)

Soluție. Notăm cu $P(n)$ propoziția din enunț.
Propozițiile $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ și $P(3)$ sînt adevărate căci :

$$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$$

$$1 = 1^2$$

$$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$$

$$3 = -1^2 + 2^2.$$

Vom arăta, în continuare, că implicația $P(n) \Rightarrow P(n+4)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. În acest scop, vom ține seama că $4 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$. Să presupunem că $P(n)$ este adevărată, adică $n = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \dots + \varepsilon_m m^2$. Rezultă :

$$n + 4 = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \dots + \varepsilon_m m^2 + 4 = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 +$$

$$+ \dots + \varepsilon_m m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2,$$

adică $P(n+4)$. Deci

$$P(n) \Rightarrow P(n+4).$$

§ 4. ȘIRURI DEFINITE PRIN RECURENȚĂ

I. Definiții prin recurență

Fie S o mulțime de numere naturale consecutive (de cele mai multe ori $S = \mathbb{N}$ sau $S = \mathbb{N}^*$). Vom spune că un șir $(x_n)_{n \in S}$ este definit prin recurență dacă sînt dați un număr de termeni consecutivi de la începutul șirului și o relație (numită relația de recurență) cu ajutorul căreia putem afla orice termen al șirului, în mod unic, dacă se cunosc termenii precedenți.

Exemple : 1) Fie M o mulțime pe care este definită o lege de compoziție internă notată cu $*$.

Definim compusul $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ prin relațiile :

a) $x_1 * x_2 = x_1 * x_2$;

b) $x_1 * x_2 * \dots * x_{n+1} : (x_1 * x_2 * \dots * x_n) * x_{n+1}$.

2) Fie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de mulțimi.

a) Definim șirul $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $X_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ în modul următor :

1. Pentru $n = 1$, $X_1 = A_1$ și

$$2. \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n \cup A_{n+1}.$$

b) Definim şirul $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $X_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$ în modul următor :

1. Pentru $n = 1$, $X_1 = A_1$ şi $k = 1$.

$$2. \bigcap_{k=1}^{n+1} A_k = (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \cap A_{n+1}.$$

3) Definim şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale în modul următor :

1. $x_0 = a$;

$$2. x_{n+1} = x_n + a^2 x_n^2.$$

4) Definim şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale în modul următor :

1. $x_0 = a$, $x_1 = b$;

$$2. x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

5) Definiţia progresiei aritmetice. Un şir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numeşte progresie aritmetică dacă :

1. $x_0 = a$;

$$2. x_{n+1} = x_n + r \text{ (numărul real } r \text{ se numeşte raţie).}$$

6) Definiţia progresiei geometrice. Un şir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numeşte progresie geometrică dacă

1. $x_0 = a$;

$$2. x_{n+1} = x_n q \text{ (numărul real } q \text{ se numeşte raţie).}$$

II. Probleme în legătură cu şirurile definite prin recurenţă

1. a) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o progresie aritmetică cu raţia r şi $x_0 = a$ (exemplul 5)). Să se exprime x_n în funcţie de a şi r .

b) Aceeaşi problemă dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este o progresie geometrică cu raţia q .

a) Inducţia. Avem :

$$x_1 = x_0 + r = a + r;$$

$$x_2 = x_1 + r = a + r + r = a + 2r;$$

$$x_3 = x_2 + r = a + 2r + r = a + 3r.$$

S-ar părea că $x_n = a + nr$ (propoziţia $P(n)$).

Demonstraţia prin inducţie completă. Propoziţia $P(0)$ este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este $x_{n+1} = a + (n+1)r$.

Fie $x_n = a + nr$. Cum $x_{n+1} = x_n + r$, rezultă :

$$x_{n+1} = a + nr + r = a + (n+1)r, \text{ adică } P(n+1).$$

b) Raționînd în mod analog ca la punctul a) obținem $x_n = a \cdot q^n$.

2. Să se studieze convergența șirului de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit astfel :

1°. $x_0 = \sqrt{2}$;

2°. $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

a) Monotonia. Inducția. Avem $x_0 = \sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ etc. Se observă că $x_0 \leq x_1$ și $x_1^2 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Rezultă $x_1^2 \leq x_2^2$, căci $2 + \sqrt{2} \leq 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ și deci $x_1 \leq x_2$. S-ar părea că șirul este monoton crescător, adică $x_n \leq x_{n+1}$ ($P(n)$) oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrația prin inducție completă. Propoziția $P(0)$, adică $x_0 \leq x_1$, este adevărată.

Propoziția $P(n+1)$ este $x_{n+1} \leq x_{n+2}$.

Să presupunem că propoziția $P(n)$ este adevărată, adică $x_n \leq x_{n+1}$.

Deducem $x_n + 2 \leq x_{n+1} + 2$. Rezultă $\sqrt{x_n + 2} \leq \sqrt{x_{n+1} + 2}$, adică $x_{n+1} \leq x_{n+2}$.

Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

b) Mărginirea. Inducția. Observăm că $x_0 \leq 2$, $x_1^2 = 2 + \sqrt{2} \leq 4$ și deci $x_1 \leq 2$. De asemenea $x_2^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} \leq 2 + 2$, adică $x_2 \leq 2$. S-ar părea că $x_n \leq 2$ ($P(n)$), oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Propoziția $P(0)$ este adevărată.

Demonstrația prin inducție completă. Propoziția $P(n+1)$ este $x_{n+1} \leq 2$.

Să presupunem că propoziția $P(n)$ este adevărată, adică $x_n \leq 2$.

Rezultă $x_n + \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$, adică $x_{n+1} \leq 2$. Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Deoarece $x_n \in [0; 2]$ șirul este mărginit.

c) Calculul limitei. Șirul fiind monoton și mărginit este convergent și deci există $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$. Trecînd la limită în relația de recurență (relația (2) din enunț) obținem :

$$l = \sqrt{2 + l}. \text{ Rezultă } l = 2, \text{ adică } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

3. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit astfel :

1°. $x_0 = 0, x_1 = 1.$

2°. $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} (n \geq 1).$

Să se arate că $x_n = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right], n \geq 0$
(propoziția $P(n)$).

Soluție. Propozițiile $P(0), P(1)$ sînt adevărate.

Propoziția $P(n+1)$ este $x_{n+1} = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right].$

Să presupunem că propoziția $P(k)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, astfel încît $1 \leq k \leq n$, în particular propozițiile $P(n-1)$ și $P(n)$ sînt adevărate, adică

$$x_{n-1} = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \right] \text{ și } x_n = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right].$$

Din condiția (2) deducem :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2} (x_{n-1} + x_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right] = \\ &= \frac{2}{3} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Deci $P(k) \Rightarrow P(n+1), k \leq n$. Cum $P(0)$ este adevărată, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Observație. S-a aplicat varianta 2.

III. Integrale care se calculează prin recurență

1. Fie șirul cu termenul general

$$I_n = \int \sin^n x \, dx (n \in \mathbb{N}). \text{ Avem :}$$

a) $I_0 = \int \sin^0 x \, dx = \int dx = x$ și $I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x$;

b) să se stabilească o relație de recurență între I_n și $I_{n-2} (n \geq 2)$;

c) să se calculeze I_2 și I_3 .

Soluție. b) Avem :

$$I_n = \int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx.$$

Dacă $f(x) = \sin^{n-1} x$, $f'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x$, $g'(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos x$, atunci, aplicând formula de integrare prin părți, obținem:

$$\begin{aligned} I_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx. \end{aligned}$$

$$\text{Deci } I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Rezultă

$$nI_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} \text{ și deci}$$

$$I_n = \frac{1}{n} [(n-1)I_{n-2} - \sin^{n-1} x \cos x]. \quad (\text{A})$$

c) Cunoscând $I_0 = x$ și $I_1 = -\sin x$, formula (A) permite să calculăm orice integrală din șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ în funcție de termenii precedenți.

$$\begin{aligned} \text{Pentru } n=2, \text{ avem } I_2 &= \frac{1}{2} (I_0 - \sin x \cdot \cos x) \text{ adică } \int \sin^2 x dx = \\ &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pentru } n=3, \text{ avem } I_3 &= \frac{1}{3} [2I_1 - \sin^2 x \cos x] = \frac{1}{3} [-2 \cos x - \\ &- \sin^2 x \cos x]. \end{aligned}$$

Propunem cititorului ca, după modelul acestui exercițiu să găsească o formulă pentru calculul integralei din șirul cu termenul general $J_n = \int \cos^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$).

2. Fie șirul cu termenul general

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n \geq 1).$$

$$\text{a) Avem } I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

b) Să se stabilească o formulă de recurență între I_{n+1} și I_n .

c) Să se calculeze I_2 .

$$\text{Soluție. b) Fie } f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}. \text{ Rezultă } f'(x) = -2n \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n+1}}.$$

Dacă $g'(x) = 1$, atunci $g(x) = x$. Aplicând formula de integrare prin părți obținem:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Rezultă $I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}$ și deci :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)I_n \right].$$

c) Pentru $n = 1$, obținem :

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x}{x^2 + a^2} + I_1 \right] \text{ și deci}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right].$$

IV. Calculul unor sume

1. Sume de forma

$$\frac{1}{1 \cdot (1 + m)} + \frac{1}{2(2 + m)} + \dots + \frac{1}{n(n + m)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + m)}.$$

($k \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$).

Ideea centrală a aflării sumelor menționate este scrierea numărului $\frac{1}{k(k + m)}$ sub forma $\frac{A}{k} + \frac{B}{k + m}$ și înlocuirea succesivă a lui k , cu $1, 2, \dots, n$. Modul de lucru rezultă din următorul

Exemplu. Să se calculeze suma :

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n + 2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 2)}.$$

Soluție. Fie $\frac{1}{k(k + 2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k + 2}$. Rezultă

$$\frac{1}{k(k + 2)} = \frac{k(A + B) + 2A}{k(k + 2)}$$

și deci sistemul

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases}. \text{ Deducem } A = \frac{1}{2} \text{ și } B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Rezultă } \frac{1}{k(k + 2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 2} \right).$$

Înlocuind în ultima egalitate pe k cu $1, 2, 3, 4, n-2, n-1, n$ obținem egalitățile :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \quad (4)$$

.....

$$\frac{1}{(n-2)n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \quad (n-2)$$

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \quad (n-1)$$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \quad (n)$$

Adunând membru cu membru cele n egalități, observăm că dacă dăm factor comun în membrul drept pe $\frac{1}{2}$, atunci $-\frac{1}{3}$ din (1) se reduce cu $\frac{1}{3}$ din (3), $-\frac{1}{4}$ din (2) se reduce cu $\frac{1}{4}$ din (4), $-\frac{1}{n}$ din $(n-2)$ se reduce cu $\frac{1}{n}$ din (n) . Este foarte plauzibil că $-\frac{1}{5}$ din (3) se va reduce cu $\frac{1}{5}$ din (5), $-\frac{1}{6}$ din (4) se va reduce cu $\frac{1}{6}$ din (6), $\frac{1}{n-2}$ din $(n-2)$ se va reduce cu $-\frac{1}{n-2}$ din $(n-4)$ și $\frac{1}{n-1}$ din $(n-1)$ se va reduce cu $-\frac{1}{n-1}$ din $(n-3)$.

Așadar, prin sumare, obținem :

$$S = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \right].$$

Observație. Metoda folosită pentru aflarea sumei S s-ar părea că nu folosește metoda inducției complete și de aceea este denumită în unele cărți „metoda directă”. În realitate reducerile făcute se observă pe câteva cazuri de la începutul șirului de egalități și se operează în tot șirul de egalități. Un raționament complet ar trebui făcut astfel:

„În ipoteza că reducerile observate se fac pînă la egalitatea (k) , $1 \leq k \leq n$, atunci ele se fac pînă la egalitatea (n) ”. Acest fapt este însă atît de evident, încît în practică acest raționament se neglijează. Așa vom proceda și noi în continuare.

Propunem cititorilor, ca după modelul acestui exemplu să calculeze suma

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. Suma de forma $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $k \in \mathbb{N}$. Notăm

$S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$. Avem:

$S_0 = 1^0 + 2^0 + \dots + n^0 = 1 + 1 + \dots + 1$ și deci

$$S_0 = n.$$

1°. Aflarea unei relații de recurență între S_k și S_{k-1}, \dots, S_1, S_0 ($k \geq 0$).

Conform formulei binomului lui Newton avem:

$$(x+1)^{k+1} = x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k + C_{k+1}^2 x^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k x + 1.$$

Înlocuind în această egalitate succesiv pe x cu $1, 2, 3, \dots, m$ obținem

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + C_{k+1}^1 1^k + C_{k+1}^2 1^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k 1 + 1 \quad (1)$$

$$3^{k+1} = 2^{k+1} + C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k 2 + 1 \quad (2)$$

$$4^{k+1} = 3^{k+1} + C_{k+1}^1 3^k + C_{k+1}^2 3^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k 3 + 1 \quad (3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k n + 1. \quad (n)$$

Însumînd cele n egalități membru cu membru și ținînd seama că numerele $2^{k+1}, 3^{k+1}, \dots, n^{k+1}$ se reduc și dînd factori comuni pe coloane obținem:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \dots + C_{k+1}^k S_1 + n.$$

Rezultă :

$$S_k = \frac{1}{C_{k+1}^k} [(n+1)^{k+1} - 1 - C_{k+1}^2 S_{k-1} - \dots - C_{k+1}^k S_1 - S_0].$$

2°. Aflarea sumelor S_1, S_2, S_3 .

a) Dacă $k = 1$, obținem

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{C_1^1} [(n+1)^2 - 1 - S_0] = \frac{1}{2} [n^2 + 2n + 1 - 1 - n] = \\ &= \frac{1}{2} (n^2 + n) = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Așadar } S_1 = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Dacă $k = 2$, obținem :

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{C_2^2} [(n+1)^3 - 1 - C_2^2 S_1 - S_0] = \frac{1}{3} [(n+1)^3 - 1 - \\ &\quad - \frac{3n(n+1)}{2} - n]. \end{aligned}$$

Rezultă :

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

c) Dacă $k = 3$, obținem :

$$S_3 = \frac{1}{C_3^3} [(n+1)^4 - 1 - C_3^2 S_2 - C_3^3 S_1 - S_0].$$

Făcînd calculele obținem:

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

În mod analog se calculează

S_4, S_5, \dots etc.

3. Aplicații în legătură cu sumele S_k

a) Să se calculeze suma

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1).$$

b) Să se calculeze suma :

$$S = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + 2n(n+3) = \sum_{k=1}^n 2k(k+3).$$

$$c) S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2).$$

Soluție. a) Avem :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \\ &= S_2 + S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \end{aligned}$$

b) Avem :

$$S = \sum_{k=1}^n 2k(k+3) = \sum_{k=1}^n (2k^2 + 6k) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k = 2S_2 + 6S_1.$$

c) Avem

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n k = S_3 + 2S_2 + 2S_1. \end{aligned}$$

Pentru punctele b) și c) calculele de detaliu le lăsăm pe seama cititorilor.

4. Fie A_n și B_m două mulțimi finite, prima cu n elemente și a doua cu m elemente.

Să se afle numărul funcțiilor $f: A_n \rightarrow B_m$.

Soluție. Fie $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ și $B_m = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Inducția. Dacă $n = 1$ și $A_1 = \{a_1\}$, atunci funcțiile definite pe B_m cu valori în A_1 sînt $f_1(a_1) = b_1, f_2(a_1) = b_2, \dots, f_m(a_1) = b_m$, deci sînt în număr de m .

Dacă $n = 2$ și $A_2 = \{a_1, a_2\}$, atunci funcțiile definite pe A_2 cu valori în B_m vor fi de forma :

$$\begin{aligned} g_1(a_1) &= b_1 = f_1(a_1) \\ g_1(a_2) &= b_1 \\ g_2(a_1) &= b_2 = f_2(a_1) \\ g_2(a_2) &= b_2 \\ &\dots \dots \dots \\ g_n(a_1) &= g_1 = f_1(a_1) \\ g_m(a_2) &= b_m. \end{aligned}$$

Așadar, funcției f_1 îi „corespund” m funcții definite pe A_2 cu valori în B_m . În mod analog se arată că fiecăruia dintre funcțiile f_2, \dots, f_m îi corespund m funcții definite pe A_2 cu valori în B_m . Evident că prin procedeul folosit epuizăm toate funcțiile definite pe A_2 cu valori în B_m . Avem, deci, m^2 funcții definite pe A_2 , cu valori în B_m .

Ni se sugerează propoziția $P(n)$: „Numărul funcțiilor definite pe A_n cu valori în B_m este m^n ”.

Demonstrația prin inducție completă. Propoziția $P(1)$ este adevărată. Să presupunem că avem m^n funcții definite pe A_n cu valori în B_m .

Fie $A_{n+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ și $f: A_n \rightarrow B_m$.

Funcției f îi corespund următoarele m funcții definite pe A_{n+1} cu valori în B_m .

$$\begin{aligned} h_1(a_1) &= f(a_1) & h_1(a_{n+1}) &= b_1; \\ h_1(a_2) &= f(a_2) & h_2(a_1) &= f(a_1) \\ &\dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ h_1(a_m) &= f(a_n) & h_2(a_n) &= f(a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(a_{n+1}) &= b_2 \\ h_m(a_1) &= f(a_1) \\ &\dots \dots \dots \\ h_m(a_n) &= f(a_n) \\ h_m(a_{n+1}) &= b_m. \end{aligned}$$

Cum avem m^n funcții $f: A_n \rightarrow B_m$ înseamnă că vom avea $m \cdot m^n = m^{n+1}$ funcții definite pe A_{n+1} cu valori în B_m (evident că prin procedeul utilizat epuizăm toate funcțiile definite pe A_{n+1} cu valori în B_m). Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

CAPITOLUL IV

ECUAȚII

§ 1. OBSERVAȚII ASUPRA ECUAȚIILOR ALGEBRICE
ȘI A UNOR FUNCȚII POLINOMIALE

1.1. GENERALITĂȚI

Fie A una din mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} sau \mathbb{C} . Mulțimea polinoamelor cu coeficienți din A va fi notată $A[X]$.

Numim ecuație algebrică cu coeficienți din A , orice ecuație de forma $p(x) = 0$, unde :

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in A[X].$$

Prin rezolvarea ecuației algebrice $p(x) = 0$, se înțelege determinarea tuturor numerelor $x \in B \supseteq A$, B fiind una din mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} sau \mathbb{C} , pentru care se verifică egalitatea. Numerele x astfel determinate se numesc rădăcinile în B ale ecuației.

Deoarece oricare ar fi polinomul $p \in A[X]$, se poate defini o funcție polinomială :

$$f: B \rightarrow B, f(x) = p(x),$$

rădăcinile în B ale ecuației algebrice $p(x) = 0$ mai sînt numite și zerourile funcției f .

Exemple : 1) $p = 2X^2 - X - 3 \in \mathbb{Z}[X]$. Să se rezolve ecuația $p(x) = 0$:

- a) în \mathbb{Z} ,
- b) în \mathbb{Q} .

În primul caz $A = B = \mathbb{Z}$. Cum $p(x) = 0$ se mai scrie $(x + 1)(2x - 3) = 0$, rezultă că ecuația are o singură rădăcină $x_0 = -1$.

În al doilea caz $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$, deci ecuația are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

2) $p = X^4 + (1 + 2\sqrt{2})X^2 - 2X + 3 \in \mathbb{R}[X]$. Să se rezolve ecuația $p(x) = 0$ în \mathbb{R} .

Observînd că $p(x) = (x^2 + \sqrt{2})^2 + (x - 1)^2$, deducem că egalitatea $p(x) = 0$ se verifică dacă și numai dacă avem $x^2 + \sqrt{2} = x - 1 = 0$, evident imposibil. Rezultă că ecuația $p(x) = 0$ nu are rădăcini în \mathbb{R} .

În legătură cu existența rădăcinilor unei ecuații algebrice reamintim **teorema fundamentală a algebrei** :

„Orice ecuație algebrică, cu coeficienți complecși, de grad mai mare sau egal cu 1, admite cel puțin o rădăcină în \mathbb{C} ”.

Ca urmare se demonstrează că — în condițiile ipotezei teoremei fundamentale — numărul rădăcinilor complexe ale ecuației este egal cu gradul acesteia.

În general, rezolvarea ecuațiilor, întâlnite în diversele capitole prevăzute de programa analitică pentru predarea matematicii la clasele IX—XII, se reduce la rezolvarea ecuațiilor algebrice.

Definiție. Fie $A \subseteq B \subseteq \mathbb{C}$ și funcția $f: B \rightarrow \mathbb{C}$. Orice număr $x_0 \in A$, pentru care se verifică egalitatea $f(x_0) = 0$, se numește rădăcină sau soluție în A , a ecuației $f(x) = 0$.

Exemplu : Ecuația $\frac{x^4 + 1}{x + 1} + \frac{4}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 3}{2} = 0$ are în \mathbb{R} rădăcina $x_0 = 3$, iar în \mathbb{C} are rădăcinile $x_1 = 3$; $x_2 = i$; $x_3 = -i$.

Definiție. Fie E_1, E_2 părți ale mulțimii \mathbb{C} și funcțiile $f: E_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $g: E_2 \rightarrow \mathbb{C}$. Ecuațiile $f(x) = 0$ și $g(x) = 0$ se zic echivalente pe $E \subseteq E_1 \cap E_2$ dacă au aceleași soluții în E .

Pentru a pune în evidență echivalența celor două ecuații scriem :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0, x \in E.$$

Exemplu : Ecuațiile $x^2 - 1 = 0$ și $x - 1 = 0$ sînt echivalente pe $\{0; +\infty\}$.

Facem observația că în stabilirea echivalenței ecuațiilor avem în vedere că $f(x) = 0$ este o egalitate numerică, x fiind un număr din E .

Propoziție. Fie f, α, β funcții definite pe $E \subseteq \mathbb{C}$, cu valori în \mathbb{C} . În acest caz putem scrie :

$$(1) f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + \alpha(x) = \alpha(x);$$

$$(2) f(x) = 0 \Leftrightarrow \beta(x) \cdot f(x) = 0, \text{ dacă } (\forall) x \in E, \beta(x) \neq 0.$$

Demonstrarea acestor proprietăți este imediată dacă avem în vedere observația făcută mai înainte. În adevăr dacă $x_0 \in E$ este o soluție a ecuației $f(x) = 0$, din egalitățile numerice $f(x_0) = 0$ și $\alpha(x_0) = \alpha(x_0)$, deducem $f(x_0) + \alpha(x_0) = 0 + \alpha(x_0) = \alpha(x_0)$, deci x_0 este o soluție a ecuației $f(x) + \alpha(x) = \alpha(x)$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) + \alpha(x) = \alpha(x)$, în E , este inclusă în mulțimea soluțiilor în E ale ecuației $f(x) = 0$. Reciproc, dacă x' este o soluție în E , a ecuației $f(x) + \alpha(x) = \alpha(x)$, din egalitățile numerice $f(x') + \alpha(x') = \alpha(x')$ și $\alpha(x') = \alpha(x')$, deducem $f(x') = 0$, ceea ce demonstrează incluziunea inversă.



a celor două mulțimi de soluții. Deducem astfel egalitatea dintre mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) = 0$ și mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) + \alpha(x) = \alpha(x)$ și cu aceasta afirmația (1) este demonstrată.

În mod analog se demonstrează și afirmația (2).

Consecința 1°. Fie ecuația $A(x) + B(x) = 0$, $x \in E$. Datorită proprietății (1) putem scrie:

$A(x) + B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) + B(x) + (-B(x)) = -B(x)$, de unde deducem:

$A(x) + B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = -B(x)$, ceea ce demonstrează că, trecând dintr-o parte în alta a unei ecuații un termen cu semn schimbat ecuația obținută este echivalentă cu ecuația inițială.

Exemplu: Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $4x^2 + 2(x - 1) = x(1 - 2x)$. Putem scrie pentru $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2(x - 1) = x(1 - 2x) &\Leftrightarrow 4x^2 + 2(x - 1) - x(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Deci ecuația propusă nu are soluții.

Consecința 2°. Să considerăm ecuația $\frac{A(x)}{N(x)} = 0$, $x \in E$. Presupunem

$N(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in E$. Prin aplicarea proprietății (2), rezultă

$$\frac{A(x)}{N(x)} = 0 \Leftrightarrow N(x) \cdot \frac{A(x)}{N(x)} = 0, \text{ sau } \frac{A(x)}{N(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0, \text{ ceea ce justi-}$$

fică operația de „eliminarea a numitorilor”, la rezolvarea ecuațiilor.

Exemplu: Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația:

$$1 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{6}{x^2-1} = 0.$$

Observând că prima parte a ecuației nu este definită pentru $x \in \{-1; 1\}$, putem scrie pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{6}{x^2-1} = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 1) \left(1 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{6}{x^2-1} \right) = \\ &= 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Să considerăm funcțiile $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ și $E \subseteq A$. Dacă orice soluție în E a ecuației $f(x) = 0$ este și soluție a ecuației $g(x) = 0$ rezultă că „ $f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$ ”. Deducem de aici că, rezolvând ecuația $g(x) = 0$ mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) = 0$ este inclusă în mulțimea soluțiilor ecuației $g(x) = 0$.

Exemplu : Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{2}(x - 2)$.

Deoarece α, β sînt numere reale, avem $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$, implicația $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ nefiind în general adevărată. Putem scrie pentru $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{2}(x - 2) &\Rightarrow (\sqrt{x^2 - 4x + 5})^2 = [\sqrt{2}(x - 2)]^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.\end{aligned}$$

Ecuația $x^2 - 4x + 3 = 0$ are rădăcinile 1 și 3. Mulțimea soluțiilor ecuației inițiale fiind inclusă în mulțimea $\{1; 3\}$ stabilim, prin verificare, că singura soluție a acestei ecuații este $x = 3$.

1.2. ECUAȚII CU MAI MULTE NECUNOSCUTE

Fie submulțimile de numere complexe E_1, E_2, \dots, E_k și funcția $f: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k \rightarrow \mathbb{C}$. Egalitatea

$$f(x; y; \dots; w) = 0$$

se numește ecuație cu k necunoscute, atașată funcției f .

A rezolva ecuația înseamnă a determina toate elementele de forma (x, y, \dots, w) , ale produsului cartezian $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$, pentru care egalitatea se verifică.

Dacă f este un polinom, gradul polinomului se numește și gradul ecuației.

Exemple : 1) Dacă $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, ecuația $2x - 3y = 5$ se numește „ecuație de gradul întâi cu două necunoscute”. Mulțimea soluțiilor acestei ecuații este

$$\left\{ \left(\alpha; \frac{2\alpha - 5}{3} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

2) Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0$. Putem scrie, pentru $(x; y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (x + y)^2 + (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x + y = 0) \wedge (x - 1 = 0) \Leftrightarrow (x = 1; y = -1).\end{aligned}$$

Deci ecuația are o singură soluție $(1; -1)$.

3) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația

$$10xy - 4x + 15y = 6.$$

Observind că ecuația este echivalentă cu $(2x + 3)(5y - 2) = 0$, rezultă că este necesar și suficient să avem $x = -\frac{3}{2}$, sau $y = \frac{2}{5}$.

Dacă $x = -\frac{3}{2}$, evident y este arbitrar în \mathbb{C} , și dacă $y = \frac{2}{5}$, x este arbitrar în \mathbb{C} .

Rezultă :

$$(x; y) \in \left\{ \left(-\frac{3}{2}; \mu \right) \mid \mu \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \left(\lambda; \frac{2}{5} \right) \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

4) Să se rezolve în numere întregi ecuația $6x^2 - 7xy + 2y^2 = 3$.

Deoarece $6x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - 2y)(2x - y)$, obținem ecuația echivalentă cu cea din enunț $(3x - 2y)(2x - y) = 3$. Rezultă de aici că, a, b fiind două numere întregi astfel încât $ab = 3$, sintem conduși la rezolvarea sistemului :

$$3x - 2y = a; 2x - y = b,$$

a cărui soluție este $(x = 2b - a; y = 3b - 2a)$. Observind că în condițiile enunțului avem :

$$(a; b) \in \{(1; 3); (3; 1); (-1; -3); (-3; -1)\},$$

obținem răspunsul :

$$(x; y) \in \{(5; 7); (-1; -3); (-5; -7); (1; 3)\}.$$

1.3. FUNCȚII OMOGENE

Fie polinomul, de două nedeterminate X, Y , cu coeficienți complecși :

$$p = a_1 X^2 + a_2 XY + a_3 Y^2,$$

ale cărui monoame au fiecare gradul doi în X și Y . Acest polinom se numește *polinom omogen de gradul doi*, cu coeficienți complecși, în nedeterminatele X și Y .

În general un polinom de k nedeterminate, X, Y, \dots, W , cu coeficienți în A , ale cărui monoame au fiecare gradul $n \geq 1$, se numește *polinom omogen de gradul n* .

Exemplu : $q = 2X^4 - X^3Y + Y^2Z^2 + Z^4$, este un polinom omogen de gradul 4, cu coeficienți întregi, în nedeterminatele X, Y, Z .

Fie p un polinom omogen de gradul n , cu coeficienți complecși de k nedeterminate X, Y, \dots, W . Un termen oarecare T al acestui polinom este de forma :

$$T = aX^{\alpha_1}Y^{\alpha_2}\dots W^{\alpha_k},$$

unde $a \in \mathbb{C}$ și $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$. Înlocuind X cu hX , Y cu hY , \dots , W cu hW , acest termen devine :

$$\begin{aligned} T' &= a(hX)^{\alpha_1}(hY)^{\alpha_2}\dots(hW)^{\alpha_k} = a \cdot h^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k} X^{\alpha_1}Y^{\alpha_2}\dots W^{\alpha_k} = \\ &= ah^n X^{\alpha_1}Y^{\alpha_2}\dots W^{\alpha_k} = h^n T. \end{aligned}$$

Deci oricare ar fi termenul T al polinomului, obținem $T' = h^n T$. Rezultă de aici o proprietate specifică polinoamelor omogene de gradul n și anume :

$$q(hX; hY; \dots; hW) = h^n q(X; Y; \dots; W).$$

Prin analogie spunem că funcția $f: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k \rightarrow \mathbb{C}$ se zice omogenă de gradul n , dacă :

$$f(hx, hy, \dots, hw) = h^n f(x, y, \dots, w).$$

Exemplu : $f(x; y; z) = \frac{2x + y + z - \sqrt[3]{xyz}}{yz\sqrt{x} + xz\sqrt{y} + xy\sqrt{z}}, (x; y; z) \in \mathbb{R}_+^3.$

Deducem, pentru $h > 0$:

$$f(hx; hy; hz) = \frac{2hx + hy + hz - \sqrt[3]{h^3xyz}}{h^2yz\sqrt{hx} + h^2xz\sqrt{hy} + h^2xy\sqrt{hz}} = h^{-\frac{3}{2}} f(x; y; z),$$

deci funcția f este omogenă de gradul $-\frac{3}{2}$.

1.4. FUNCȚII SIMETRICE

Funcția $f: E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se zice simetrică dacă $f(x; y) = f(y; x)$, oricare ar fi $(x; y) \in E^2$.

Exemplu : $f(x; y) = \frac{1 - xy}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}, (x; y) \in \mathbb{R}_+^2.$

În general, funcția $f: E^k \rightarrow \mathbb{C}$ se zice simetrică în raport cu argumentele x, y, \dots, w , dacă este simetrică în raport cu fiecare pereche dintre acestea.

Exemplu : $f(x; y; z) = (y+z)\sqrt[3]{x} + (x+z)\sqrt[3]{y} + (x+y)\sqrt[3]{z}$, $(x; y; z) \in \mathbb{C}^3$ este simetrică în raport cu x, y, z , deoarece este simetrică în raport cu y și z , în raport cu x și z , în raport cu x și y , adică :

$$f(x; z; y) = f(x; y; z), f(z; y; x) = f(x; y; z), f(y; x; z) = f(x; y; z).$$

Dacă $f(x; y; \dots; w), (x; y; \dots; w) \in E$, este simetrică în raport cu argumentele x, y, \dots, w , atunci oricare ar fi permutarea x', y', \dots, w' a acestora, avem :

$$f(x', y', \dots, w') = f(x, y, \dots, w).$$

Observații. 1°. Următoarele polinoame se numesc polinoame simetrice elementare de k nedeterminate X, Y, \dots, W :

$$p_1 = X + Y + \dots + W$$

$$p_2 = XY + XZ + \dots + TW$$

...

$$p_k = XY \dots W.$$

Spre exemplu pentru $k = 2$ se obțin $p_1 = X + Y$, $p_2 = XY$, pentru $k = 3$ se obțin $p_1 = X + Y + Z$, $p_2 = XY + YZ + ZX$, $p_3 = XYZ$ ș.a.m.d.

Se cunoaște teorema :

„Orice polinom simetric de nedeterminatele X, Y, \dots, W , se exprimă cu ajutorul polinoamelor simetrice elementare ale acestor nedeterminate”.

Aplicație. Dacă x, y, z sînt numere reale astfel încît $x + y + z \geq 0$, atunci

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Observăm că putem scrie $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3x^2y + 3xy^2 + 6xyz = (x^3 + y^3 + z^3) + 3yz(x + y + z) + 3xz(x + y + z) + 3xy(x + y + z) - 3xyz = (x^3 + y^3 + z^3) + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$.

Deci $p_1^3 = (x^3 + y^3 + z^3) + 3p_1p_2 - 3p_3$, de unde deducem :

$$x^3 + y^3 + z^3 = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3.$$

Deoarece $p_1^3 - 3p_1p_2 = p_1(p_1^2 - 3p_2) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy) = \frac{1}{2}(x + y + z)[(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2] \geq 0$, rezultă $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.

2°. Fie $f: E^k \rightarrow C$ o funcție simetrică de x, y, \dots, w , unde $(x, y, \dots, w) \in E^k$.

Rezultă că (x, y, \dots, w) , fiind o soluție a ecuației $f(x, y, \dots, w) = 0$, este, de asemenea, soluție orice permutare a acesteia.

Exemplu: Să considerăm funcția polinomială $f: Z^3 \rightarrow Z$, $f(x; y; z) = x + y + z - xyz$. Deoarece ecuația $f(x; y; z) = 0$ admite soluția $(1; 2; 3) \in Z$, datorită simetriei, deducem că sînt soluții ale ecuației în Z și $(1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3; 1; 2); (3; 2; 1)$.

§ 2. ECUAȚIA DE GRADUL ÎNTÎI

2.1. ECUAȚIA DE GRADUL ÎNTÎI CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ

Forma generală a ecuației de gradul întii cu o singură necunoscută este $ax + b = 0$, unde $aX + b \in C[X]$. Sînt posibile situațiile:

(1) $a \neq 0$. În acest caz putem scrie succesiv $ax + b = 0 \Leftrightarrow a^{-1} \cdot (ax) + a^{-1} \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a)x = -a^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$, deci ecuația are soluție unică.

(2) $a = 0$. Deoarece oricare ar fi $x \in C$, avem $ax = 0$, rezultă că egalitatea $ax + b = 0$ nu este verificată dacă $b \neq 0$ și este verificată, oricare ar fi $x \in C$, dacă $b = 0$. În concluzie:

$a \neq 0$ — ecuația are soluția unică $x = -\frac{b}{a}$;

$a = 0, b \neq 0$ — ecuația nu are soluții;

$a = 0, b = 0$ — ecuația este identic verificată pe C (este nedeterminată).

Facem observația că ecuația $ax + b = 0$, are soluție unică oricare ar fi $a \neq 0$ numai dacă coeficienții a și b aparțin unuia din corpurile numerice Q, R sau C .

Dacă $aX + b \in Z[X]$, unde $(a; b) = 1$, ecuația $ax + b = 0$ are soluție unică în Z dacă și numai dacă — coeficientul a este 1 sau -1 .

Exemple: 1) Să se rezolve în R ecuația:

$$\frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{x^2-4} = 0.$$

Observăm că pentru $x \in R \setminus \{-2; 2\}$ putem scrie:

$$\frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow (x-2) + 4 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ — imposibil.}$$

Deci ecuația nu are soluții.

2) Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația:

$$\frac{m}{x} - \frac{m-1}{x+1} = \frac{m(m-1)(x-1)}{2x(x+1)}, \quad (1)$$

unde m este un parametru complex.

Oricare ar fi $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0\}$, putem scrie:

$$\begin{aligned} \frac{m}{x} - \frac{m-1}{x+1} &= \frac{m(m-1)(x-1)}{2x(x+1)} \Leftrightarrow 2m(x+1) - 2(m-1)x = \\ &= m(m-1)(x-1) \Leftrightarrow (m+1)(m-2)x = m(m+1). \end{aligned}$$

În cazurile de existență unică a soluției, din ultima ecuație deducem $x = m : (m-2)$. Deoarece $x \notin \{-1; 0\}$, rezultă $m \notin \{0; 1\}$. În concluzie, pentru ecuația (1), putem afirma:

1°. $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1; 2\}$ — ecuația are soluția unică $x = \frac{m}{m-2}$;

2°. $m \in \{0; 1; 2\}$ — ecuația nu are soluții;

3°. $m = -1$ — ecuația este nedeterminată, $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0\}$.

Propunem ca în problemele referitoare la rezolvarea ecuațiilor să fie folosiți termenii: „ecuația are soluții“, „ecuația nu are soluții“, „ecuația este nedeterminată“.

2.2. ECUAȚIA DE GRADUL ÎNȚII CU DOUĂ SAU MAI MULTE NECUNOSCUTE

a) *Observații.* Forma generală a ecuației este:

$$ax + by + \dots + lw = d, \quad (2)$$

coeficienții aparținând uneia din mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} .

În general ecuațiile de tipul (2) sînt nedeterminate.

Exemple: 1) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2x - 3y = 1$.

Dacă avem în vedere că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă $y = \frac{(2x-1)}{3} \in \mathbb{R}$,

deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este:

$$\left\{ \left(\lambda; \frac{2\lambda-1}{3} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2) Să se rezolve în \mathbb{Q} ecuația $\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = \sqrt{5}$. Dacă $(x_0; y_0) \in \mathbb{Q}^2$ este o soluție a ecuației, deducem:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x_0 + \sqrt{3}y_0 &= \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2}x_0 = \sqrt{5} - \sqrt{3}y_0 \Rightarrow 2x_0^2 = \\ &= 5 + 3y_0^2 - 2\sqrt{15}y_0 \Leftrightarrow 2\sqrt{15}y_0 = 5 + 3y_0^2 - 2x_0^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y_0 = 0; 5 + 3y_0^2 - 2x_0^2 = 0) \Leftrightarrow \left(y_0 = 0; x_0^2 = \frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

Deoarece $x_0 \in \mathbb{Q}$ și $x_0^2 = \frac{5}{2}$ sînt incompatibile, rezultă că ecuația propusă nu are soluții.

b) Ecuații diofantice de gradul întâi cu două necunoscute
Ecuația

$$ax + by = c, \quad (3)$$

unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ se numește *ecuație diofantică** de gradul întâi cu două necunoscute. În cele ce urmează vom presupune $ab \neq 0$.

Propoziție. Fie a și b două numere întregi prime între ele. Soluția generală $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, a ecuației $ax + by = 0$ este:

$$(x = \lambda b; y = -\lambda a), \lambda \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

În adevăr dacă $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ este o soluție, avem $ax_0 = -by_0$, deci $b \mid ax_0$. Cum a și b sînt prime între ele, deducem $b \mid x_0$, adică $x_0 = \lambda_0 b$, $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$. Înlocuind x_0 în ecuație, rezultă $a(\lambda_0 b) + by_0 = 0$, sau $y_0 = -a\lambda_0$. Deci soluția $(x_0; y_0)$ a ecuației, este de forma (4). În plus se verifică imediat că orice pereche de numere $x = \lambda b$, $y = -\lambda a$, cu $\lambda \in \mathbb{Z}$, este o soluție a ecuației din enunț.

Propoziție: Soluția generală a ecuației (3), unde a și b sînt prime între ele, este:

$$(x = x_1 + \lambda b; y = y_1 - \lambda a), \lambda \in \mathbb{Z} \quad (4')$$

$(x_1; y_1) \in \mathbb{Z}^2$ fiind o soluție oarecare a ecuației.

Înlocuind soluția (4') în ecuația (3), deducem $a(x_1 + \lambda b) + b(y_1 - \lambda a) = c \Leftrightarrow ax_1 + by_1 = c$, evident datorită ipotezei.

Fie acum $(x'; y') \in \mathbb{Z}^2$ o soluție oarecare a ecuației (3), diferită de soluția $(x_1; y_1)$, deci $x' \neq x_1$ sau $y' \neq y_1$. Deducem $ax_1 + by_1 = c$, $ax' + by' = c$, de unde $a(x' - x_1) + b(y' - y_1) = 0$. Rezultă imediat $x' - x_1 = \lambda b$, $y' - y_1 = -\lambda a$, cu $\lambda \in \mathbb{Z}$, deci $x' = x_1 + \lambda b$; $y' = y_1 - \lambda a$ ($\lambda \in \mathbb{Z}$).

* Diofant din Alexandria (sec. III e.n.), în lucrarea Aritmetica, pune unele probleme care conduc la rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.

În concluzie, dacă a și b sînt prime între ele, problema rezolvării ecuației diofantice (3) se reduce la problema găsirii unei soluții particulare $(x_1; y_1)$.

Propoziție. Fie numerele întregi a, b, c și $d = (a; b)$. Următoarele afirmații sînt echivalente :

(1) d nu divide c ;

(2) ecuația $ax + by = c$ nu admite soluții în \mathbb{Z} .

Pentru a demonstra (1) \Rightarrow (2), fie $d > 1$ și $a = da_1, b = db_1$. Dacă $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ este o soluție a ecuației, deducem $d(a_1x + b_1y) = c$, deci $d \mid c$, contradicție. Rezultă că ecuația nu admite soluții în numere întregi.

Implicația (2) \Rightarrow (1) se demonstrează analog.

Exemple : 1) Să se determine toate soluțiile $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$; cu $x > 0, y > 0$, ale ecuației $29x + 12y = 1351$.

Indicăm aici un procedeu de aflare a unei soluții particulare a ecuației. Pentru aceasta să observăm că putem scrie, din ecuația propusă :

$$y = -\frac{1351 - 29x}{12}, \text{ sau } y = 112 - 2x - \frac{5x - 7}{12}.$$

Deoarece 5 este prim cu 12, rezultă că numerele $5 \cdot 0; 5 \cdot 1; 5 \cdot 2; \dots; 5 \cdot 11$, dau resturi diferite între ele la împărțirea prin 12. Prin urmare există $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 11$ astfel încît $5 \cdot k$ dă restul 7 la împărțirea prin 12. Prin încercări găsim $k = 11$. Putem deci pune $x_1 = 11$. Rezultă imediat $y_1 = 86$.

Deci soluția generală $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, a ecuației propuse este :

$$(x = 11 + 12\lambda; y = 86 - 29\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Deoarece $x > 0, y > 0$, avem și $-\frac{11}{12} < \lambda < \frac{86}{29}$, deci $\lambda \in \{0; 1; 2\}$.

Singurele soluții ale ecuației, care verifică toate condițiile enunțului sînt, prin urmare :

$$(x_1 = 11; y_1 = 86); (x_2 = 23; y_2 = 57); (x_3 = 35; y_3 = 28).$$

Facem observația că valori suficient de mari în modul ale coeficienților a și b fac anevoioasă problema găsirii soluției particulare $(x_1; y_1)$ a ecuației.

În următorul exemplu prezentăm un model de rezolvare, a ecuației diofantice de gradul întii cu două necunoscute, prin „împărțiri succesive“.

2) Fie progresiile aritmetice :

$$\div 12; 29; 46; \dots \quad \text{și} \quad \div 11; 42; 73; \dots$$

Să se arate că mulțimea termenilor comuni ai celor două progresii alcătuiesc, de asemenea, o progresie aritmetică.

Fie $x_n = 12 + 17n$, $n \in \mathbb{N}$, respectiv $y_m = 11 + 31m$, $m \in \mathbb{N}$, termenul general al primei și al celei de a doua progresii. Problema aflării termenilor comuni conduce la rezolvarea ecuației diofantice $x_n = y_m$, cu $n, m \in \mathbb{N}$. Avem deci :

$$x_n = y_m \Leftrightarrow 12 + 17n = 11 + 31m \Leftrightarrow 31m - 17n = 1.$$

Se scoate necunoscuta cu coeficientul cel mai mic în modul :

$$n = \frac{31m - 1}{17}.$$

Putem scrie :

$$n = 2m - \frac{3m + 1}{17}.$$

Deoarece n și $2m$ sînt numere naturale, rezultă $\frac{3m + 1}{17} = a \in \mathbb{Z}$, deci

$m = \frac{17a - 1}{3} \Leftrightarrow m = 6a - \frac{a + 1}{3}$. Raționînd analog, deducem $\frac{a + 1}{3} = \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 3\lambda - 1$. Deci $m = 17\lambda - 6$ și $n = 31\lambda - 11$. Deoarece m și n sînt numere naturale rezultă $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că termenii comuni celor două progresii sînt $x_n = x_{31\lambda - 11} = 17(31\lambda - 11) + 12 = 527\lambda - 175$. Notînd $x_{31\lambda - 11} = z_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$, șirul termenilor comuni ai celor două progresii, este :

$$(z_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}^*} = (352; 879; \dots; 527\lambda - 175; \dots).$$

În fine, deoarece $z_{\lambda+1} - z_\lambda = 527$, rezultă $(z_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică de rație $r = 527$.

3) Să se determine toate progresiile aritmetice care îndeplinesc condiția că termenii de rang n , p și q sînt respectiv 2, 3 și 5 unde $n + p + q = 31$.

Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de rație r . Putem scrie :

$$\left. \begin{array}{l} 2 = a_1 + (n - 1)r \\ 3 = a_1 + (p - 1)r \\ 5 = a_1 + (q - 1)r \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1 = (p - n)r \\ 2 = (q - p)r \end{cases} \Rightarrow \frac{q - p}{p - n} = 2 \Leftrightarrow 2n - 3p + q = 0.$$

Din sistemul $2n - 3p + q = 0$; $n + p + q = 31$, deducem $n = 4p - 31$, $q = 62 - 5p$ și deoarece $n > 0$, $q > 0$, rezultă $\frac{31}{4} < p < \frac{62}{5}$, deci $p \in \{8; 9; 10; 11; 12\}$.

Se obțin rezultatele din tabelul alăturat.

| Soluția | n | p | q | r | a_i |
|---------|-----|-----|-----|------|-------|
| 1° | 1 | 8 | 22 | 1/7 | 2 |
| 2° | 5 | 9 | 17 | 1/4 | 1 |
| 3° | 9 | 10 | 12 | 1 | -6 |
| 4° | 13 | 11 | 7 | -1/2 | 8 |
| 5° | 17 | 12 | 2 | -1/5 | 26/5 |

4) Prețurile unitare pentru trei categorii de obiecte sînt 13,50 lei ; 25,60 lei și 7,20 lei. Cite obiecte s-au cumpărat din fiecare categorie dacă s-au plătit 2 350 lei pentru un total de 210 obiecte ?

Pentru rezolvare să notăm cu x , y și respectiv z numărul obiectelor cumpărate din fiecare categorie. Obținem ecuațiile :

$$13,5x + 25,6y + 7,2z = 2\,350$$

$$x + y + z = 210.$$

Eliminînd z între cele două ecuații deducem $63x + 184y = 8\,380$, cu $(x; y) \in \mathbb{N}^2$. Deci

$$x = 133 - 3y + \frac{5y + 1}{63},$$

de unde $\frac{5y + 1}{63} = a \in \mathbb{N}$, sau $y = 13a - \frac{2a + 1}{5}$. Rezultă $\frac{2a + 1}{5} = b \in \mathbb{N}$,

deci $a = 2b + \frac{b - 1}{2}$ și prin urmare $\frac{b - 1}{2} = \lambda \in \mathbb{N}$. Sîntem conduși astfel la $b = 2\lambda + 1$, ceea ce implică $a = 5\lambda + 2$, deci :

$$x = 60 - 184\lambda; y = 63\lambda + 25.$$

Din ecuația $x + y + z = 210$ rezultă și $z = 125 + 121\lambda$.

Avînd în vedere condițiile : $0 \leq x \leq 210$, $0 \leq y \leq 210$, $0 \leq z \leq 210$ și $\lambda \in \mathbb{N}$, obținem $\lambda = 0$. Soluția problemei este $(x = 60; y = 25; z = 125)$.

Recomandăm ca exercițiu o problemă analoagă în care prețurile unitare sînt 8 lei, 12 lei și respectiv 25 lei, numărul total al obiectelor este 44, iar suma plătită 820 lei (Se găsește $x = 5; y = 15; z = 24$).

5) Să se rezolve ecuația $\cos \frac{2x}{3} = 2 + \cos^3 \frac{x}{5}$.

Vom observa că ecuația propusă se mai scrie sub forma :

$$\cos \frac{2x}{3} - \cos^3 \frac{x}{5} = 2,$$

și, avînd în vedere :

$$\left| \cos \frac{2x}{3} - \cos^3 \frac{x}{5} \right| \leq \left| \cos \frac{2x}{3} \right| + \left| \cos^3 \frac{x}{5} \right| \leq 2,$$

deducem cu necesitate :

$$\cos \frac{2x}{3} = 1; \cos \frac{x}{5} = -1,$$

deci $\frac{2x}{3} = 2k\pi$ și $\frac{x}{5} = \pi(2h + 1)$, unde $k, h \in \mathbb{Z}$.

Sîntem astfel conduși la ecuația diofantică :

$$3k - 10h = 5 \quad (k, h \in \mathbb{Z}).$$

Deoarece

$$k = 3h + 2 + \frac{h-1}{3},$$

putem pune $h - 1 = 3m$, $m \in \mathbb{Z}$, deci $h = 3m + 1$.

Înlocuind în $x = 5\pi(2h + 1)$ obținem soluțiile ecuației : $x = 15\pi(2m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$.

§ 3. ECUAȚIA DE GRADUL DOI CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ

Avem în vedere ecuațiile de forma $ax^2 + bx + c = 0$, coeficienții a, b, c aparținînd uneia din mulțimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sau \mathbb{C} și $a \neq 0$. Ne vom opri numai asupra cîtorva tipuri de probleme.

3.1. AFLAREA RĂDĂCINILOR COMUNE A DOUĂ ECUAȚII DE GRADUL DOI CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ

În cazul ecuațiilor cu coeficienți numerici, rezolvarea problemei este imediată. În cazul ecuațiilor :

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0, \quad a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0, \quad (5)$$

cu coeficienți parametrici, prin eliminarea lui x între acestea, se obține condiția necesară și suficientă :

$$(a_1b_2 - b_1a_2)(b_1c_2 - c_1b_2) - (a_1c_2 - c_1a_2)^2 = 0.$$

pentru ca ecuațiile să admită cel puțin o rădăcină comună. În practică acest procedeu ni se pare oarecum anevoios. Propunem ca problema să fie rezolvată considerând ecuațiile (5) ca formînd un sistem ale cărui necunoscute sînt parametrul sau parametrii ce intervin în problemă și rădăcina comună.

Exemple : 1) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că ecuațiile : $(m - 1)x^2 + (m + 2)x - 3m = 0$ și $(m + 1)x^2 - (m + 2)x + m = 0$ admit cel puțin o rădăcină comună în \mathbb{R} .

Rezultă că trebuie să determinăm soluțiile $(m; x) \in \mathbb{R}^2$ ale sistemului format de cele două ecuații. Adunînd aceste ecuații, deducem $m(x^2 - 1) = 0$

Va trebui deci să rezolvăm sistemul :

$$\begin{cases} (m + 1)x^2 - (m + 2)x + m = 0, \\ m(x^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Obținem soluțiile $(0; 0)$, $(0; 2)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$. Deci pentru $m = 0$ ecuațiile au ambele rădăcini comune. pentru $m = 1$ ecuațiile au rădăcina comună $x = 1$ și pentru $m = -1$ ecuațiile au rădăcina comună $x = -1$.

1) Să se stabilească pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, ecuațiile :

$$(5m + 4)x^2 - 6x + (m - 4) = 0; (m + 1)x^2 - (m + 2)x + m = 0,$$

admit o singură rădăcină comună în \mathbb{R} .

Din ecuația a doua, a sistemului alcătuit de cele două ecuații, deducem :

$$m = \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - x + 1} \quad (x^2 - x + 1 \neq 0 \text{ pentru } x \in \mathbb{R}). \quad (6)$$

Substituind m în prima ecuație a sistemului, obținem $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0$, deci $x = -2$, sau $x = -1$, sau $x = 1$, sau $x = 2$.

Înlocuind în (6) valorile obținute pentru x , rezultă că soluțiile $(m; x)$ ale sistemului sînt :

$$\left(-\frac{8}{7}; -2\right), (-1; -1), (1; 1); (0; 2).$$

Rezultă că pentru m luînd valorile $-\frac{8}{7}$, -1 , 1 , sau 0 , ecuațiile admit ca rădăcină comună respectiv pe -2 , -1 , 1 , 2 . Facem în plus observația că din rezolvarea problemei rezultă că nu există valori ale lui m pentru care ecuațiile din enunț să admită ambele rădăcini comune.

3) Dacă m, p, q sînt parametri reali, să se stabilească în ce condiții ecuațiile :

$$(3mp + m + 2p)x^2 - 3px - (m + 2p) = 0;$$

$$(m + 2q + 1)x^2 - (m + 3q + 2)x + (3mq + m - 2q) = 0,$$

admit cel puțin o rădăcină comună.

Eliminînd m între cele două ecuații se obține ecuația :

$$(x + 1)(x - 1)(x - 2)[(6pq + p + 2q + 1)x + (3pq + p + q)] = 0,$$

de unde deducem $x = -1$, sau $x = 1$, sau $x = 2$, sau $x = -(3pq + p + q) : (6pq + p + 2q + 1)$. Înlocuind, pe rînd, valorile lui x în una din ecuațiile inițiale obținem răspunsul :

$x = -1$ este rădăcină comună dacă $m = -1$, sau $p = q + 1 = 0$;

$x = 1$ este rădăcină comună dacă $m = 1$, sau $p = 3q + 1 = 0$;

$x = 2$ este rădăcină comună dacă $m = 0$, sau $4p = q = -1$;

$x = -(3pq + p + q) : (6pq + p + 2q + 1)$ este rădăcină comună dacă

$$m = -\frac{p(p-1)(15pq+3p+5q+2)}{(p-1)[3q^2(3p+1)^2+2q(9p^2+9p+4)+(3p^2+3p+1)]}$$

(S-a presupus că sînt îndeplinite condițiile de existență pentru numerele care intervin în ultimul caz.)

4) Ecuațiile cu coeficienți complecși $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ admit o singură rădăcină comună x_0 . Să se formeze ecuația de gradul doi ale cărei rădăcini sînt rădăcinile necomune x_1 , respectiv x_2 , ale celor două ecuații.

Pentru rezolvare să observăm că avem :

$$x_0^2 + p_1x_0 + q_1 = 0, \quad x_0^2 + p_2x_0 + q_2 = 0,$$

de unde, prin scădere, deducem $(p_1 - p_2)x_0 = q_2 - q_1$.

Dacă $p_1 = p_2$ și $q_1 \neq q_2$, ecuațiile nu au rădăcini comune, iar dacă $p_1 = p_2$ și $q_1 = q_2$, ecuațiile au ambele rădăcini comune. Deci pentru ca problema să aibă soluții este necesar ca $p_1 \neq p_2$. În acest caz :

$$x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}; \quad x_1x_0 = q_1; \quad x_2x_0 = q_2. \quad (7)$$

În fine, dacă $x_0 = 0$, obținem $q_1 = q_2 = 0$, deci $x_1 = -p_1$, $x_2 = -p_2$ și ecuația cerută este $x^2 + (p_1 + p_2)x + p_1p_2 = 0$. De asemenea, ipoteza $q_1 = q_2$ conduce la $x_0 = 0$, deci $q_1 = q_2 = 0$.

Vom presupune deci $p_1 \neq p_2$ și cel puțin unul din numerele q_1, q_2 nenul.

Din relațiile (7), deducem :

$$x_1 = \frac{q_1(p_1 - p_2)}{q_2 - q_1} ; x_2 = \frac{q_2(p_1 - p_2)}{q_2 - q_1} ,$$

ecuația de gradul doi, cu rădăcinile x_1 și x_2 , fiind :

$$(q_1 - q_2)x^2 + (p_1 - p_2)(q_1^2 - q_2^2)x + q_1q_2(p_1 - p_2)^2 = 0.$$

Pentru aplicația următoare vom observa că, avînd în vedere teorema fundamentală a algebrei și unicitatea descompunerii unui polinom în factori liniari, se deduce echivalența afirmațiilor :

- (1) polinoamele $p, q \in \mathbb{C}[x]$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ au aceleași rădăcini ;
- (2) polinoamele $p, q \in \mathbb{C}[x]$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ au coeficienții proporționali.

În plus facem mențiunea că dacă $p = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, $q = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$, pentru proporționalitatea coeficienților adoptăm scrierea formală :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \dots = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_0}{b_0} ,$$

în sensul că numărătorul sau numitorul unuia dintre rapoarte fiind nul și numitorul, respectiv numărătorul aceluiași raport este nul.

5) Dacă $p, q \in \mathbb{Z}$ să se determine în ce condiții ecuațiile :

$$(p+1)x^2 + (2p+1)x - 2 = 0 ; 2x^2 + (q+4)x + 2q = 0,$$

admit aceleași rădăcini.

Datorită observației anterioare putem scrie $\frac{p+1}{2} = \frac{2p+1}{q+4} = \frac{-1}{q}$ și sîntem conduși la unica condiție $q(p+1) = -2$. Deoarece p și q sînt numere întregi deducem $p+1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$, deci $p \in \{-3; -2; 1; 0\}$. Obținem astfel soluțiile :

$$(p_1 = -3; q = 1); (p_2 = -2; q_2 = 2); (p_3 = 1; q_3 = -1);$$

$$(p_4 = 0; q_4 = -2).$$

6) Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației :

$3x^2 + (3m-4)x - (m-1) = 0$ și x', x'' sînt rădăcinile ecuației : $(m+2)x^2 + (4m-3)x - 3(m-1) = 0$, să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{C}$ pentru care se verifică relațiile :

$$x_1x' = x_2x'' = 2.$$

Înlocuind în prima ecuație x cu $\frac{2}{x}$, obținem ecuația $(m-1)x^2 - 2(3m-4)x - 12 = 0$, ale cărei rădăcini sînt evident $\frac{2}{x_1}$ și $\frac{2}{x_2}$, deci x' și respectiv x'' . Rezultă că ecuația obținută are aceleași rădăcini cu cea de a doua ecuație din enunț, ceea ce este tot una cu:

$$\frac{m-1}{m+2} = \frac{-2(3m-4)}{4m-3} = \frac{4}{m-1},$$

de unde se deduce $m = -1$.

Evident că pentru rezolvare am presupus $x_1 x_2 \neq 0$, deci $m \neq 1$. Dacă $m = 1$, ecuațiile date sînt în ordine $3x^2 - x = 0$, $3x^2 + x = 0$ și problema nu are soluții.

3.2. LIMITELE RĂDĂCINILOR REALE ALE ECUAȚIEI DE GRADUL AL DOILEA CU COEFICIENȚI REALI, DACĂ COEFICIENTUL TERMENULUI DE GRADUL DOI TINDE CĂTRE ZERO

Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, cu coeficienți reali. $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Deoarece coeficientul a tinde către zero, putem presupune a suficient de mic astfel încît $4|ac| < b^2$, deci $b^2 - 4ac > 0$. În acest caz, pentru $b > 0$ avem:

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = -\frac{c}{b}.$$

Pentru $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se obțin limite laterale infinite și diferite.

Analog, dacă $b < 0$, rezultă $\lim_{a \rightarrow 0} x_2 = -\frac{c}{b}$, iar pentru x_1 se deduc limite laterale infinite și diferite.

Deoarece pentru $a \rightarrow 0$, avem $ax^2 + bx + c \rightarrow bx + c$, considerăm ecuația $bx + c = 0$ ca „ecuația limită a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ ”. Din acest motiv este util uneori să interpretăm ecuația algebrică de gradul întâi, cu o singură necunoscută, ca o ecuație de gradul doi cu o singură necunoscută „cu o rădăcină la infinit”.

Exemplu: Să se scrie ecuațiile tangentelor duse la cercul $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ din punctul $P(-1; 4)$.

Dacă $F(x; y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3$, deducem $F(-1; 4) = 4$, deci punctul P este exterior cercului, ceea ce confirmă existența a două tangente prin P la cerc.

Ecuațiile tangentelor de pantă m , duse la cerc, sînt $y - 2 = m(x - 3) \pm 4\sqrt{1 + m^2}$ și, din condiția ca acestea să treacă prin punctul P , deducem $2 = -4m \pm 4\sqrt{1 + m^2}$, ceea ce conduce la $4m - 3 = 0$, deci $m = \frac{3}{4}$. Rezultă că ecuația uneia din tangente este $y - 4 = \frac{3}{4}(x + 1) \Leftrightarrow 3x - 4y + 19 = 0$.

Considerînd, în cazul general, cercul de ecuație $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ și punctul $P(x_0, y_0)$, exterior cercului, ecuația, care dă pantele celor două tangente duse din P la cerc, este:

$$[(x_0 - a)^2 - r^2]m^2 - 2(x_0 - a)(y_0 - b)m + [(y_0 - b)^2 - r^2] = 0 \quad (8)$$

Ecuația (8) are întotdeauna două soluții dacă $(x_0 - a)^2 - r^2 \neq 0$, sau $x_0 \neq a \pm r$. În cazurile de excepție una din tangente este paralelă cu axa ordonatelor.

Revenind la cazul numeric anterior, evident ecuația $4m - 3 = 0$ este cazul limită al ecuației (8) pentru $(x_0 - a)^2 - r^2 \rightarrow 0$. Rezultă că a doua tangentă prin $P(-1; 4)$ la cerc, fiind paralelă cu axa ordonatelor, are ecuația $x + 1 = 0$.

3.3. RELAȚIA INDEPENDENTĂ DE PARAMETRU CARE EXISTĂ ÎNTRE RĂDĂCINILE UNEI ECUAȚII DE GRADUL DOI CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ. AI CĂREI COEFICIENȚI DEPEND DE UN PARAMETRU

Exemplu : Fie ecuația $mx^2 + 2(m + 1)x + (m - 1) = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$.

1°. Să se arate că între rădăcinile ecuației există o relație independentă de m .

2°. Să se determine, cu ajutorul acestei relații, rădăcinile reale egale ale ecuației.

3°. Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuația admite rădăcini reale egale.

4°. Să se determine valorile parametrului m astfel încît ambele rădăcini ale ecuației să fie numere întregi.

Notînd $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 x_2$, deducem :

$$S = \frac{-2(m + 1)}{m}, \quad P = \frac{m - 1}{m}.$$

Eliminând parametrul m , obținem relația între rădăcini, independentă de parametru:

$$2P - S - 4 = 0 \rightarrow 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) - 4 = 0. \quad (9)$$

Dacă rădăcinile x_1 și x_2 sînt egale, să punem $x_1 = x_2 = \alpha$. Din (9) deducem $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$, deci $\alpha = 2$, sau $\alpha = -1$.

Dacă $\alpha = 2$ este rădăcina dublă, din ecuația dată, avem $4m + 4(m + 1) + m - 1 = 0 \rightarrow m = -1/3$.

Înlocuind $\alpha = -1$ în aceeași ecuație, obținem $-3 = 0$, contradicție care conduce la concluzia că ecuația inițială nu admite rădăcină dublă $\alpha = -1$. Să observăm că această ecuație mai poate fi scrisă sub forma:

$$x^2 + 2\left(1 + \frac{1}{m}\right)x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 0,$$

deci ecuația limită pentru m tinzînd la infinit este $x^2 + 2x + 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $x' = x'' = -1$. Rezultatul, aparent contradictoriu, obținut la rezolvarea punctului 2°, se justifică prin faptul că ecuația inițială este de tipul:

$$(am + b)x + (cm + d)x + (em + f) = 0,$$

al cărei discriminant este $\Delta = (cm + d)^2 - 4(am + b)(em + f) = (c^2 - 4ae)m^2 + \dots$

Ecuația $\Delta = 0$, de gradul doi în m , are o „rădăcină la infinit” dacă $c^2 - 4ae = 0$, ceea ce este și cazul problemei propuse.

Pentru rezolvarea ultimului punct al problemei, din (9) putem scrie:

$$x_1 = \frac{x_2 + 4}{2x_2 - 1}, \text{ deci } 2x_1 = \frac{2x_2 + 8}{2x_2 - 1}, \text{ sau } 2x_1 = 1 + \frac{9}{2x_2 - 1}.$$

Rezultă de aici că, x_1, x_2 fiind numere întregi, avem cu necesitate $2x_2 - 1 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$, sau $x_2 \in \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\}$.

Rezultatele ce se obțin sînt următoarele: $\left(m = -\frac{1}{3}; x_1 = x_2 = 2\right);$

$\left(m = -\frac{1}{4}; x_1 = 1; x_2 = 5\right); (m = 1; x_1 = -4; x_2 = 0).$

3.4. APLICAȚII LA REZOLVAREA UNOR ECUAȚII ÎN NUMERE ÎNTREGI

Evident, problema rezolvării ecuației de gradul doi cu o singură necunoscută prezintă interes în această lucrare, numai în cazul în care coeficienții ecuației depind de un parametru. Mai facem observația că

În cazurile în care ambele rădăcini sînt întregi iar coeficienții ecuației depind de un singur parametru, problema se rezolvă în general folosind relația între rădăcini, independentă de parametru (Spunem, „în general”, deoarece pot interveni dificultăți de calcul legate în special de eliminarea parametrului și de explicitarea relației relativ la una dintre rădăcini). Pentru diversele tipuri de ecuații care intervin nu există un procedeu general de rezolvare a problemei. În cele ce urmează vom prezenta cîteva exemple.

Exemple : 1) Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încît ecuația :

$$x^2 - 2(2m + 1)x + 3m(m + 1) = 0,$$

să admită cel puțin o rădăcină întreagă.

Să observăm pentru început că din enunț rezultă că o rădăcină fiind număr întreg și cealaltă rădăcină este număr întreg. În plus, deoarece rădăcinile ecuației sînt :

$$2m + 1 - \sqrt{m^2 + m + 1} \quad \text{și} \quad 2m + 1 + \sqrt{m^2 + m + 1},$$

rezultă că $\sqrt{m^2 + m + 1}$ este număr întreg. Punînd $\sqrt{m^2 + m + 1} = m + k$, $k \in \mathbb{Z}$, deducem :

$$m = -\frac{k^2 - 1}{2k - 1}$$

de unde rezultă $4m = -\left(2k + 1 - \frac{3}{2k - 1}\right)$.

Deoarece $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4m \in \mathbb{Z}$, obținem condiția necesară :

$$2k - 1 \in \{-3; -1; 1; 3\},$$

deci $k \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Înlocuind obținem pentru m valorile -1 și 0 .

Soluțiile problemei sînt : $(m = -1; x_1 = -2; x_2 = 0)$ și $(m = 0; x_1 = 0; x_2 = 2)$.

2) Să se determine valorile parametrului întreg m astfel încît ecuația :

$$2mx^2 + (8m - 3)x + 6m - 6 = 0, \quad (10)$$

să admită cel puțin o rădăcină în \mathbb{Z} .

Pentru rezolvarea problemei vom scrie din (10) :

$$2m(x^2 + 4x + 3) = 3(x + 2),$$

de unde deducem $x \neq -1$, $x \neq -3$ și în plus pentru $m = 0$, ecuația admite rădăcina $x_1 = -2$. În fine, deducem :

$$m = \frac{3(x + 2)}{2(x^2 + 4x + 3)} \quad (10')$$

Deoarece mulțimea valorilor lui x , pentru care valorile fracției din partea a doua a relației (10') sînt în modul mai mari decît 1 este inclusă într-un interval, este suficient să determinăm un interval de lungime cît mai mică care include această mulțime. Pentru aceasta punînd:

$$\left| \frac{3(x+2)}{2(x^2+4x+3)} \right| < 1, \quad x \neq -2,$$

deducem $x \in (-\infty; -4) \cup \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup (0; +\infty)$. Deci pot verifica relația (10') numai valorile -4 și 0 ale lui x . Avînd în vedere că am obținut anterior și valoarea -2 a lui x , înlocuind în (10') deducem soluțiile problemei: $(m = -1; x_1 = -4; x_2 = -\frac{3}{2})$, $(m = 0; \text{ecuație de gradul întâi cu rădăcina } x_0 = -2)$ și $(m = 1; x_1 = 0; x_2 = -5/2)$.

3) Să se stabilească în ce condiții ecuația:

$$(m+k)x^2 + 2(m+1)x + (m+2k-1) = 0; \quad m, k \in \mathbb{Z}; \quad m+k \neq 0.$$

admite ambele rădăcini numere întregi.

Dacă $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 x_2$, putem scrie:

$$S = -\frac{2(m+1)}{m+k}; \quad P = \frac{m+2k-1}{m+k},$$

de unde:

$$m(S+2) = -Sk - 2; \quad m(P-1) = -Pk + 2k - 1.$$

Dacă $m \neq 0$, deducem:

$$(S+2)(Pk - 2k + 1) = (P-1)(Sk + 2),$$

sau

$$(k-1)(S-2P+4) = 0.$$

Pentru $k = 1$ ecuația din enunț se scrie $(m+1)(x^2 + 2x + 1) = 0$. Cum $m \neq -1$, rezultă $x_1 = x_2 = -1$.

Pentru $k \neq 1$ obținem $S - 2P + 4 = 0$, deci $2x_1 x_2 - (x_1 + x_2) - 4 = 0$, relație care se mai scrie sub forma:

$$2x_2 = 1 + \frac{9}{2x_1 - 1},$$

de unde deducem $2x_1 - 1 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$. Se obțin astfel următoarele perechi de soluții:

$$(-4; 0); (-1; -1); (1; 5); (2; 2).$$

Înlocuind în ecuația din enunț se obțin condițiile cerute.

Dacă $m = 0$, ecuația inițială se scrie $kx^2 + 2x + 2k - 1 = 0$, $k \neq 0$. Observînd că discriminantul ecuației este $\Delta = (1 - k)(2k + 1)$ și avînd în vedere condițiile $\Delta \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, deducem $k = 1$, deci $x_1 = x_2 = -1$.

Răspunsul este prezentat în tabelul următor:

| | | | | |
|------------|----------------------------|------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Condiția | $2k + m = 1$ $k \neq 1$ | $k = 1$ $m \neq -1$ | $4m + 3k + 1 = 0$ $k \neq 1$ | $3m + 2k + 1 = 0$ $k \neq 1$ |
| Rădăcinile | $(-4; 0)$ | $(-1; -1)$ | $(1; 5)$ | $(2; 2)$ |

4) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ astfel încît:

$$\left[\frac{x^2 - 4}{3} \right] = (x + 2)^2,$$

unde $[a]$ este „partea întreagă a numărului a ”.

Dacă $x = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, deducem $\left[3k^2 - 2 + \frac{2}{3} \right] = (3k + 2)^2$ deci $3k^2 - 2 = 9k^2 + 12k + 4$, de unde obținem $k = -1$ și $x = -3$.
Dacă $x = 3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, deducem $3k^2 + 8k + 5 = 0$, deci $k = -1$ și $x = -2$.

Dacă $x = 3k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, sîntem conduși la ecuația $3k^2 + 4k + 1 = 0$, deci $k = -1$ și $x = -4$.

Soluțiile ecuației sînt deci $x_1 = -4$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$.

3.5. POZIȚIILE RĂDĂCINILOR REALE ALE ECUAȚIEI DE GRADUL DOI CU COEFICIENȚI REALI, CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ, FAȚĂ DE UN NUMĂR REAL ȘI FAȚĂ DE UN INTERVAL

Exemple : 1) Să se studieze pozițiile rădăcinilor reale ale ecuației:

$$(m^2 - 1)x^2 - 2(2m + 1)x - m(m + 2) = 0, \quad m \in \mathbb{R},$$

în raport cu numărul 2.

Discriminantul ecuației este $\Delta = (2m + 1)^2 + m(m + 2)(m^2 - 1) = m^2(m^2 + m + 1) + m(m^2 + m + 1) + (m^2 + m + 1) = (m^2 + m + 1)^2$.

Deducem de aici rădăcinile ecuației din enunț:

$$x_1 = \frac{-m}{m+1}; \quad x_2 = \frac{m+2}{m-1}, \quad \text{unde } m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

Dacă $m = 1$ sau $m = -1$ ecuația are gradul întâi și admite, în ambele cazuri, rădăcina $x_0 = -1/2 < 2$.

Pentru a stabili pozițiile rădăcinilor ecuației în cazurile $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, vom studia variația semnului fiecăreia din diferențele:

$$x_1 - 2 = \frac{-(3m+2)}{m+1}; \quad x_2 - 2 = \frac{-(m-4)}{m-1},$$

care este prezentată în următorul tabel:

| m | $-\infty$ | -1 | $-\frac{2}{3}$ | 1 | 4 | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------|----------------|-----|-----|-----------|
| $x_1 - 2$ | - | + | 0 | - | - | - |
| $x_2 - 2$ | - | - | - | + | 0 | - |

Rezultă că ecuația propusă admite rădăcini reale, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, aceste rădăcini fiind situate față de numărul 2 în modul următor:

$$m \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; 1\right) \cup (4; +\infty) \Rightarrow x_1 < 2; x_2 < 2;$$

$$m \in \{-1; 1\} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2} < 2;$$

$$m \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x_2 < 2 < x_1;$$

$$m = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 < 2 = x_1;$$

$$m \in (1; 4) \Rightarrow x_1 < 2 < x_2;$$

$$m = 4 \Rightarrow x_1 < 2 = x_2.$$

2) Să se studieze pozițiile rădăcinilor ecuației

$$(4m^2 - 1)x^2 - 6mx - (m^2 - 1) = 0, \quad m \in \mathbb{R},$$

față de intervalul $[-1; 2]$.

Discriminantul ecuației este $\Delta = 9m^2 + (4m^2 - 1)(m^2 - 1) = 4m^4 + 4m^2 + 1 = (2m^2 + 1)^2$. Se obțin astfel rădăcinile ecuației propuse:

$$x_1 = \frac{m+1}{2m-1}; \quad x_2 = \frac{1-m}{2m+1}, \quad m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}.$$

Deducem :

$$x_1 - (-1) = \frac{m+1}{2m-1} + 1 = \frac{3m}{2m-1}; \quad x_1 - 2 = \frac{m+1}{2m-1} - 2 = \frac{3(1-m)}{2m-1};$$

$$x_2 - (-1) = \frac{1-m}{2m+1} + 1 = \frac{m+2}{2m+1}; \quad x_2 - 2 = \frac{1-m}{2m+1} - 2 = \frac{-(5m+1)}{2m+1}.$$

Putem astfel alcătui următoarele tabele :

| m | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $+\infty$ |
|--------------|----------------|----------------|------------|---------------|----------------|-----------|
| $x_1 - (-1)$ | + | + | 0 | - | + | + |
| $x_1 - 2$ | - | - | - | - | + | - |
| | $-1 < x_1 < 2$ | $-1 < x_1 < 2$ | $x_1 < -1$ | $x_1 < 2$ | $-1 < x_1 < 2$ | |

| m | $-\infty$ | -2 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|--------------|----------------|------------|----------------|----------------|----------------|-----------|
| $x_2 - (-1)$ | + | 0 | - | + | + | + |
| $x_2 - 2$ | - | - | - | + | 0 | - |
| | $-1 < x_2 < 2$ | $x_2 < -1$ | $x_2 > 2$ | $-1 < x_2 < 2$ | $-1 < x_2 < 2$ | |

Răspunsul este următorul :

$$m < -2 \Rightarrow -1 < x_1, x_2 < 2;$$

$$m = -2 \Rightarrow x_2 = -1 < x_1 < 2;$$

$$-2 < m < -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 < -1 < x_1 < 2;$$

$$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{ecuația are gradul unu cu rădăcina } x_0 = -\frac{1}{4} \in (-1; 2);$$

$$-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{5} \Rightarrow -1 < x_1 < 2 < x_2;$$

$$m = -\frac{1}{5} \Rightarrow -1 < x_1 < 2 = x_2;$$

$$-\frac{1}{5} < m < 0 \Rightarrow -1 < x_1, x_2 < 2;$$

$$m = 0 \Rightarrow x_1 = -1 < x_2 < 2;$$

$$0 < m < \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 < -1 < x_2 < 2;$$

$$m = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ecuația are gradul întâi cu rădăcina } x_0 = \frac{1}{4} \in (-1; 2);$$

$$\frac{1}{2} < m < 1 \Rightarrow -1 < x_2 < 2 < x_1;$$

$$m = 1 \Rightarrow -1 < x_2 < 2 = x_1;$$

$$m > 1 \Rightarrow -1 < x_1, x_2 < 2.$$

După cum se poate constata din aceste exemple, rezolvarea problemelor a fost ușurată, deoarece discriminanții ecuațiilor s-au exprimat, în fiecare caz, prin pătratele unor polinoame. În cazul în care discriminantul ecuației nu se exprimă prin pătratul unui polinom, rezolvarea problemei prin procedeul indicat implică dificultăți de calcul, pentru a căror evitare indicăm în continuare alte două procedee de rezolvare.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$). Dacă discriminantul ecuației atașate funcției este pozitiv, se poate alcătui următorul tabel de variație a semnelor valorilor funcției:

| x | $-\infty$ | x_1 | $\frac{x_1 + x_2}{2}$ | x_2 | $+\infty$ |
|--------|------------------|-------|-----------------------|-------|------------------|
| $f(x)$ | $\text{sign } a$ | 0 | $-\text{sign } a$ | 0 | $\text{sign } a$ |

(S-a notat prin $\text{sign } a$, semnul lui a și prin x_1, x_2 rădăcinile ecuației atașate).

Fie α este un număr real care nu este rădăcină a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.

Dacă $x_1 < \alpha < x_2$, datorită tabelului anterior $af(\alpha) < 0$ și reciproc inegalitatea $af(\alpha) < 0$ implică $x_1 < \alpha < x_2$.

Dacă $\alpha \notin [x_1; x_2]$, pe baza aceluiași tabel, deducem $af(\alpha) > 0$ și reciproc din $af(\alpha) > 0$ rezultă $\alpha \notin [x_1; x_2]$.

În fine să observăm că $\alpha \notin [x_1; x_2]$ implică $\alpha < x_1$ sau $x_2 < \alpha$. În primul caz deducem:

$$\alpha < \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a},$$

iar în al doilea caz:

$$\alpha > \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

În concluzie :

$$(1) \ x_1 \leq x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha. \end{cases}$$

$$(2) \ x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0. \end{cases}$$

$$(3) \ \alpha_2 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \alpha < -\frac{b}{2a}. \end{cases}$$

Utilizînd aceleași notații, să considerăm acum intervalul $[\alpha; \beta]$. Deducem :

$$(1') \ x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) > 0. \end{cases}$$

$$(2') \ \alpha < x_1 \leq x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta. \end{cases}$$

$$(3') \ x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0. \end{cases}$$

$$(4') \ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ (af\beta) < 0. \end{cases}$$

3) Fie ecuația $(m-2)x^2 + 2(3m-8)x - (m-4) = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

Să se determine valorile parametrului m astfel încît ecuația să admită cel puțin o rădăcină în $I = (-\infty; 1]$.

Dacă $m = 2$ ecuația are o singură rădăcină $x = \frac{1}{2} \in I$.

Dacă $m \neq 2$ discriminantul ecuației este $\Delta = (3m - 8)^2 + (m - 2)(m - 4) = 2(5m^2 - 27m + 36) = 2(5m - 12)(m - 3)$. Pentru rezolvarea problemei rezultă condiția necesară:

$$m \in \left(-\infty; \frac{12}{5}\right] \cup [3; +\infty) \setminus \{2\},$$

în aceste cazuri ecuația avînd rădăcinile reale x_1, x_2 . Punînd $x_1 \leq x_2$, rezultă că ecuația admite cel puțin o rădăcină în I în următoarele cazuri:

$$(1) x_1 \leq x_2 < 1; (2) x_1 < 1 < x_2; (3) 1 \in \{x_1; x_2\}.$$

Rezolvare (1). Notînd $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(3m - 8)x - (m - 4)$ putem scrie:

$$x_1 \leq x_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ (m - 2)f(1) > 0 \\ \frac{8 - 3m}{m - 2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{12}{5}\right] \cup [3; +\infty) \setminus \{2\} \\ (m - 2)(3m - 7) > 0 \\ \frac{2m - 5}{m - 2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{12}{5}\right] \cup [3; +\infty) \setminus \{2\} \\ m \in (-\infty; 2) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right) \\ m \in (-\infty; 2) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 2) \cup [3; +\infty).$$

Rezolvare (2)

$$x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ (m - 2)f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{12}{5}\right] \cup [3; +\infty) \setminus \{2\} \\ m \in \left(2; \frac{7}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(2; \frac{7}{3}\right).$$

Rezolvare (3). Dacă 1 este rădăcină a ecuației deducem $f(1) = 0$, deci $m = \frac{7}{3}$.

În concluzie ecuația din enunț are cel puțin o rădăcină în intervalul I dacă și numai dacă avem $m \in \left(-\infty; \frac{7}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

4) Să se determine valorile parametrului real m astfel încât ecuația:

$$(m+1)x^2 - (3m+10)x + (3m+2) = 0$$

să admită cel puțin o rădăcină în intervalul $I = [-1; 1]$.

Dacă $m = -1$ ecuația devine $7x + 1 = 0$ și are rădăcina $x_0 = -\frac{1}{7} \in I$.

Dacă $m \neq -1$, o condiție necesară este $\Delta \geq 0$. Deoarece $\Delta = (3m+10)^2 - 4(m+1)(3m+2) = -(3m^2 - 40m - 92) = -(m+2)(3m-46)$, deducem $m \in \left[-2; \frac{46}{3}\right] \setminus \{-1\}$.

Condiția $\Delta \geq 0$ fiind îndeplinită, ecuația admite cel puțin o rădăcină în intervalul I în următoarele cazuri:

- (1) $x_1 < -1 < x_2 < 1$; (2) $-1 < x_1 < 1 < x_2$; (3) $-1 < x_1 \leq x_2 < 1$;
(4) $f(-1) = 0$; (5) $f(1) = 0$,

x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuației și $f(x) = (m+1)x^2 - (3m+10)x + (3m+2)$.

Rezolvare (1).

$$\begin{cases} (m+1)f(-1) < 0 \\ (m+1)f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(7m+13) < 0 \\ (m+1)(m-7) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{13}{7}; -1\right).$$

Având în vedere și $\Delta \geq 0$ se obțin soluțiile $m \in \left(-\frac{13}{7}; -1\right)$.

Rezolvare (2).

$$\begin{cases} (m+1)f(-1) > 0 \\ (m+1)f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(7m+13) > 0 \\ (m+1)(m-7) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1; 7).$$

Se obțin soluțiile $m \in (-1; 7)$.

Rezolvare (3).

$$\begin{cases} (m+1)f(-1) > 0 \\ (m+1)f(1) > 0 \\ -1 < \frac{3m+10}{2(m+1)} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(7m+13) > 0 \\ (m+1)(m-7) > 0 \\ (m+8)(m+1) < 0 \\ (5m+12)(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-8; -\frac{12}{5}\right).$$

Având în vedere condiția $\Delta \geq 0$ deducem în acest caz $m \in \emptyset$.

Rezolvare (4). $f(-1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{13}{7}$.

Rezolvare (5). $f(1) = 0 \Leftrightarrow m = 7$.

Deducem în final că ecuația admite cel puțin o rădăcină în intervalul I dacă și numai dacă avem $m \in \left[-\frac{13}{7}; 7\right]$.

Drept concluzie, ca urmare a rezolvării problemelor din exemplele 3 și 4, facem observația că procedeul de rezolvare utilizat necesită un volum sporit de muncă, dacă este necesară studierea tuturor situațiilor legate de poziția rădăcinilor reale ale ecuației de gradul doi, față de un număr sau un interval.

În continuare vom indica, pentru astfel de probleme, un alt procedeu de rezolvare, care ni se pare a fi mai economic dacă avem în vedere volumul de muncă utilizat. Pentru înțelegerea modului de lucru, înaintea exemplelor pe care le prezentăm, facem două observații.

Observații : 1. Să presupunem că x, y sînt variabile în \mathbb{R} astfel încît $y = x - \alpha$ unde α este un număr real fixat. Tabelul de variație a semnelor variabilei y , în funcție de valorile variabilei x , este următorul :

| x | $-\infty$ | α | $+\infty$ |
|-----|-----------|----------|-----------|
| y | - | 0 | + |

Aceasta ne permite următoarele concluzii :

$$x < \alpha \Leftrightarrow y < 0 ; x = \alpha \Leftrightarrow y = 0 ; x > \alpha \Leftrightarrow y > 0.$$

Astfel problema stabilirii pozițiilor valorilor variabilei x față de numărul α se identifică cu problema stabilirii semnelor valorilor variabilei y .

2. Să considerăm acum variabilele reale x și y astfel încît $y = \frac{x - \alpha}{x - \beta}$, unde $\alpha \neq \beta$ sînt două numere reale fixate. Presupunind $\alpha < \beta$, tabelul de variație a semnelor variabilei y , în funcție de valorile variabilei x este următorul :

| x | $-\infty$ | α | β | $+\infty$ |
|-----|-----------|----------|---------|-----------|
| y | + | 0 | - | + |

Rezultă că putem scrie :

$$x \in (\alpha ; \beta) \Leftrightarrow y < 0 ; x = \alpha \Leftrightarrow y = 0 ; x \notin [\alpha ; \beta] \Leftrightarrow y > 0.$$

Menționăm că în $y = \frac{x - \alpha}{x - \beta}$, considerînd $\beta < \alpha$, concluzia privind pozițiile valorilor variabilei x față de intervalul $[\beta ; \alpha]$, este aceeași.

Deducem de aici că problema studierii pozițiilor valorilor variabilei x față de intervalul determinat de numerele α, β se identifică cu problema studierii semnelor valorilor variabilei y .

5) Să se studieze pozițiile rădăcinilor reale ale ecuației

$$(m+3)x^2 - 8mx - (9m^2 + 2m - 15) = 0,$$

față de numărul -2 , în funcție de valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$.

Să considerăm pentru început $m \neq -3$.

Discriminantul ecuației este $\Delta = 16m^2 + (m+3)(9m^2 + 2m - 15) = 9m^3 + 45m^2 - 9m - 45 = 9(m+5)(m+1)(m-1)$.

Menționăm că este necesară calcularea discriminantului la începutul rezolvării, deoarece dacă acesta este pătratul unui polinom, este indicat procedeul de rezolvare din exemplele 1 și 2.

Având în vedere observația 1 facem substituția $y = x + 2$ (deoarece $\alpha = -2$) și putem alcătui următorul tabel de variație a semnelui lui g :

| x | $-\infty$ | -2 | $+\infty$ |
|-----|-----------|------|-----------|
| g | $-$ | 0 | $+$ |

Rezultă $x = y - 2$ și, înlocuind în ecuația propusă, deducem:

$$(m+3)y^2 - 12(m+1)y - 9(m^2 - 2m - 3) = 0.$$

Discriminantul ecuației în y este $\Delta' = 36(m+1)^2 + 9(m+3)(m^2 - 2m - 3) = 9(m+5)(m+1)(m-1)$. (Rezultatul $\Delta' = \Delta$ nu surprinde, deoarece prin substituția $y = x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, avem $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$ deci ecuațiile în x și y au rădăcinile de aceeași natură).

Dacă y_1, y_2 sînt rădăcinile ecuației în y , putem scrie:

$$P = y_1 y_2 = \frac{-9(m+1)(m-3)}{m+3}; \quad S = y_1 + y_2 = \frac{12(m+1)}{m+3}.$$

În cazul $m = -3$ ecuația propusă este de gradul întâi și are soluția $x_0 = \frac{5}{2} > -2$.

Rezultatele obținute sînt sintetizate în tabelul numărul 1, tabel care constituie răspunsul pentru problema propusă.

| m | Δ | P | S | Ecuatia in y | Ecuatia in x |
|-----------|----------|-----|-----|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $-\infty$ | | | | Rădăcini complexe conjugate | Rădăcini complexe conjugate |
| -5 | 0 | | | $y_1 = y_2 > 0$ | $x_1 = x_2 > -2$ |
| | $+$ | $+$ | $+$ | Răd. reale diferite $y_1 > 0$ $y_2 > 0$ | Răd. reale diferite $x_1 > -2$ $x_2 > -2$ |
| -3 | $=$ | $=$ | $=$ | | |
| | $+$ | $-$ | $-$ | Răd. reale diferite $y_1 < 0$ $y_2 > 0$ | Răd. reale diferite $x_1 < -2 < x_2$ |
| -1 | 0 | 0 | 0 | $y_1 = y_2 = 0$ | $x_1 = x_2 = -2$ |
| | $-$ | $+$ | $+$ | Rădăcini complexe conjugate | Rădăcini complexe conjugate |
| 1 | 0 | | | $y_1 = y_2 > 0$ | $x_1 = x_2 > -2$ |
| | $+$ | $+$ | $+$ | Răd. reale diferite $y_1 > 0$ $y_2 > 0$ | Răd. reale diferite $x_1 > -2$ $x_2 > -2$ |
| 3 | 0 | | | $y_1 = 0 < y_2$ | $x_1 = -2 < x_2$ |
| | $+$ | $-$ | $+$ | Rădăcini reale diferite $y_1 < 0$ $y_2 > 0$ | Rădăcini reale diferite $x_1 < -2 < x_2$ |
| $+\infty$ | | | | | |

TABELUL NR. 1

6) Să se rezolve și să se discute ecuația :

$$(3m - 1) \cos 2x + 4(m - 1) \sin x + 3m - 5 = 0, m \in \mathbb{R}.$$

Vom observa că ecuația propusă se mai poate scrie $(3m - 1)(1 - \sin^2 x) + 4(m - 1) \sin x + 3m - 5 = 0$, de unde deducem :

$$(3m - 1) \sin^2 x - 2(m - 1) \sin x - 3(m - 1) = 0. \quad (11)$$

Notînd $\sin x = t$ obținem ecuația :

$$(3m - 1)t^2 - 2(m - 1)t - 3(m - 1) = 0, m \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$$

$$|t| \leq 1, \quad (11')$$

al cărei discriminant este $\Delta = (m - 1)^2 + 3(m - 1)(3m - 1) = (2m - 1)(5m - 2)$.

Pentru $m \in \left(-\infty : \frac{2}{5}\right] \cup [1; +\infty) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ ecuația (11') admite două rădăcini reale, t_1 și t_2 .

Dacă $|t_1| \leq 1$, ecuația (11') admite familia de soluții:

$$x = (-1)^k \arcsin t_1 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dacă și $|t_2| \leq 1$, ecuația (11') admite și familia de soluții:

$$x = (-1)^h \arcsin t_2 + h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Sistem astfel conduși la a stabili condițiile în care ecuația (11') admite rădăcini în $[-1; 1]$. Pentru aceasta facem substituția $y = \frac{t-1}{t+1}$, și datorită tabelului:

| | | | | | |
|-----|-----------|------|-----|-----------|---|
| | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ | |
| y | | + | - | 0 | + |

sistem în măsură să stabilim apartenența, sau neapartenența, valorilor lui t la intervalul $[-1; 1]$, după semnele valorilor lui y .

Din $y = \frac{t-1}{t+1}$, deducem $t = \frac{y+1}{1-y}$ și înlocuind în ecuația (11'), rezultă:

$$my^2 + 2(3m - 2)y - (m - 2) = 0. \quad (11'')$$

Discriminantul ecuației (11'') este $\Delta' = (3m - 2)^2 + m(m - 2) = 2(m - 1)(5m - 2)$, deci $\Delta = \Delta'$ (a se vedea observația făcută la exemplul anterior).

Dacă y_1, y_2 sînt rădăcinile ecuației (11'') deducem:

$$P = y_1 y_2 = \frac{-(m-2)}{m}; \quad S = y_1 + y_2 = \frac{-2(3m-2)}{m}.$$

Evident am presupus $m \neq \frac{1}{3}$ și, datorită ecuației (11''), $m \neq 0$.

Pentru aceste valori ale lui m , înlocuind în (11'), rezultă:

— pentru $m = \frac{1}{3}$ ecuația are gradul unu și admite rădăcina $t_0 = -\frac{3}{2} \notin [-1; 1]$;

— pentru $m=0$ ecuația admite rădăcinile $-1 \in [-1; 1]$ și $3 \notin [-1; 1]$.

Tabelul numărul 2, sintetizează rezultatele obținute, permițându-se următoarele concluzii în legătură cu ecuația (11):

(1) $m \in (-\infty; 0] \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$ — ecuația admite o singură familie de soluții;

(2) $m \in (0; 1)$ — ecuația nu admite soluții;

(3) $m \in (1; 2)$ — ecuația admite două familii de soluții.

| m | Δ | P | S | Ecuația în y | Ecuația în t |
|-----------|----------|-----|-----|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $-\infty$ | + | - | - | Rădăcini reale dif. $y_1 < 0 < y_2$ | Rădăcini reale dif. $t_1 \in (-1; 1)$ $t_2 \notin [-1; 1]$ |
| 0 | = | = | = | | $t_1 = -1 \in [-1; 1], t_2 \notin [-1; 1]$ |
| | + | + | + | Rădăcini reale dif. $y_1 > 0$ $y_2 > 0$ | Rădăcini reale dif. $t_1 \notin [-1; 1]$ $t_2 \notin [-1; 1]$ |
| $1/3$ | = | = | = | | Ec. gr. I $t_0 \notin [-1; 1]$ |
| | + | + | + | Rădăcini reale dif. $y_1 > 0$ $y_2 > 0$ | Rădăcini reale dif. $t_1 \notin [-1; 1]$ $t_2 \notin [-1; 1]$ |
| $2/5$ | 0 | + | + | $y_1 \cdot y_2 > 0$ | $t_1, t_2 \notin [-1; 1]$ |
| $2/3$ | - | + | 0 | Rădăcini complexe conjugate | Rădăcini complexe conjugate |
| 1 | 0 | + | - | $y_1 \cdot y_2 < 0$ | $t_1, t_2 \in (-1; 1)$ |
| | + | + | - | $y_1 < 0$ $y_2 < 0$ | $t_1 \in (-1; 1)$ $t_2 \in (-1; 1)$ |
| 2 | 0 | - | - | $y_1 < 0 = y_2$ | $t_1 \in (-1; 1), t_2 \in [-1; 1]$ |
| | + | - | - | $y_1 < 0 < y_2$ | $t_1 \in (-1; 1)$ $t_2 \notin [-1; 1]$ |
| $+\infty$ | + | - | - | Rădăcini reale diferite | Rădăcini reale diferite |

TABELUL NR. 2

3.6. DIFERITE APLICAȚII

Exemple : 1) Fie ecuația $x^2 + px + q = 0$ ale cărei rădăcini sînt x_1 și x_2 .

a) Dacă $p, q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, valorile raportului rădăcinilor sînt rădăcinile ecuației

$$q\lambda^2 + (2q - p^2)\lambda + q = 0.$$

b) Dacă $p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 + q + k < 0$; k fiind un număr real pozitiv, fixat, ecuația are rădăcini reale diferite.

c) Să se determine numerele p și q în ipoteza $x_1 = p$; $x_2 = q$.

Pentru a rezolva punctul a), notînd $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$ ($q \neq 0 \Rightarrow x_1 x_2 \neq 0$), putem scrie

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = -p \end{array} \right\} \Rightarrow (1 + \lambda)x_2 = -p \Rightarrow (1 + \lambda)\lambda x_2 = -\lambda p \Rightarrow (1 + \lambda)x_1 = -\lambda p.$$

Înmulțind parte cu parte relațiile puse în evidență deducem $(1 + \lambda)^2 q = \lambda p^2$, sau $q\lambda^2 + (2q - p^2)\lambda + q = 0$.

Afirmația de la punctul b) este demonstrată dacă $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Punînd $A = p^2 + q + k$, deducem $\Delta = p^2 - 4(A - p^2 - k) = 5p^2 + 4k - 4A > 0$, deoarece $k \geq 0$, $A < 0$.

Rezolvăm ultima chestiune utilizînd relațiile lui Viète. Sîntem astfel conduși la rezolvarea sistemului:

$$p + q = -p; \quad pq = q.$$

Datorită ecuației a doua a sistemului deducem $p = 1$ sau $q = 0$ și avînd în vedere prima ecuație putem scrie $p = 1 \Rightarrow q = -2$, $p = 0 \Rightarrow q = 0$. Deci soluțiile problemei sînt $(p = 0; q = 0)$ și $(p = 1; q = -2)$.

2) Ecuația $x^2 + 2x - a = 0$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0\}$, are rădăcinile x_1 și x_2 . Să se formeze ecuația de gradul doi, avînd rădăcinile y_1 și y_2 , în fiecare din ipotezele:

$$(1) \quad y_1 = \frac{1 + x_1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{1 + x_2}{x_2};$$

$$(2) \quad y_1 = \frac{1 - x_1}{1 + x_1}, \quad y_2 = \frac{1 - x_2}{1 + x_2}.$$

Facem observația că am propus două probleme de același tip pentru a prezenta două moduri de rezolvare diferite, cititorul avînd posibilitatea de a alege, de la caz la caz, modul de lucru.

Pentru a rezolva prima problemă vom observa că ecuația cerută este

$$y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0.$$

Deoarece $x_1 + x_2 = -2$; $x_1x_2 = -a$, putem scrie:

$$y_1 + y_2 = \frac{1+x_1}{x_2} + \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1}{x_1x_2} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2) =$$

$$= \frac{1}{x_1x_2} [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_1 + x_2)] = \frac{2(a+1)}{a};$$

$$y_1y_2 = \frac{(1+x_1)(1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1}{x_1x_2} = \frac{a+1}{a}.$$

deci ecuația în y este $ay^2 + 2(a+1)y + (a+1) = 0$.

Vom rezolva problema (2) exprimând y_1 în funcție numai de una dintre rădăcinile ecuației în x . Deducem:

$$y = \frac{1-x_1}{1+x_2} = \frac{x_1 - x_1}{x_1 + x_1x_2} = \frac{x_1 + 2x_1 - a}{x_1 - a}.$$

(S-a înlocuit $x_1^2 = a - 2x_1$, obținut din $x_1^2 + 2x_1 - a = 0$.)

Deci $y_1 = \frac{3x_1 - a}{x_1 - a}$ și evident $y_2 = \frac{3x_2 - a}{x_2 - a}$. Sîntem astfel conduși

la substituția $y = \frac{3x - a}{x - a}$, de unde rezultă $x = a \cdot \frac{y-1}{y-3}$. Înlocuind în ecuația în x putem scrie succesiv:

$$a^2(y-1)^2 + 2a(y-1)(y-3) - a(y-3)^2 = 0 \Leftrightarrow a(y^2 - 2y + 1) +$$

$$+ 2(y^2 - 4y + 3) - (y^2 - 6y + 9) = 0 \Leftrightarrow (a+1)y^2 - 2(a+1)y +$$

$$+ (a-3) = 0.$$

3) Ecuațiile:

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0; \quad mx^2 + 2(2m-1)x + 1 = 0,$$

unde m este un parametru real nenul, au rădăcinile a, b și respectiv α, β . Să se determine numerele x_1 și x_2 care îndeplinesc condițiile:

$$\frac{x_1 - a}{x_1 - b} + \frac{x_2 - a}{x_2 - b} = 0; \quad \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} + \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta} = 0.$$

Să se interpreteze geometric rezultatul obținut.

Notăm:

$$S_1 = a + b; \quad P_1 = ab; \quad S_2 = \alpha + \beta; \quad P_2 = \alpha\beta; \quad S = x_1 + x_2; \quad P = x_1x_2.$$

Relațiile din enunț se scriu respectiv :

$$2(P + P_1) - SS_1 = 0 ; 2(P + P_2) - SS_2 = 0.$$

Înlocuind : $S_1 = 2m ; P_1 = m + 2 ; S_2 = \frac{-2(2m-1)}{m} , P_2 = \frac{1}{m}$, obținem sistemul :

$$\begin{cases} mS - P = m + 2 \\ (2m - 1)S + mP = -1 \end{cases} \quad (12)$$

Determinantul sistemului este

$$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2m - 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 2m - 1.$$

Dacă $m^2 + 2m - 1 = 0$, deducem și

$$\begin{vmatrix} m & m + 2 \\ 2m - 1 & -1 \end{vmatrix} = -2(m^2 + 2m - 1) = 0,$$

deci sistemul (12) este compatibil nedeterminat. Soluție a sistemului este orice pereche ordonată de numere complexe $(S ; P)$, unde S este arbitrar, iar $P = mS - m - 2$ (În acest caz ecuațiile din enunț au aceleași rădăcini.)

Dacă $m^2 + 2m - 1 \neq 0$ sistemul (12) are soluția unică :

$$S = 1 ; P = -2$$

deci x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$. Deducem $x_1 = -1 ; x_2 = 2$.

Facem observația că pentru $m \in (-\infty ; -1) \cup (2 ; +\infty)$, fiecare dintre ecuațiile date are rădăcini reale diferite. Condițiile din enunț exprimă că punctele $S(x_1 ; 0)$ și $T(x_2 ; 0)$ sînt conjugate armonice cu punctele $A(a ; 0)$ și $B(b ; 0)$, de asemenea, sînt conjugate armonice și cu punctele $C(\alpha ; 0)$, $D(\beta ; 0)$. (Reamintim că punctele S și T se zic conjugate armonice cu punctele A și B , dacă punctele S și T determină pe segmentul $|AB|$ rapoarte de valori opuse.)

4) Să se rezolve ecuația :

$$(m + 1)x^2 - 6mx + 3(3m + 1) = 0, m \in \mathbb{C} \setminus \{-1\},$$

în fiecare din ipotezele :

(1) $3x_1 - x_2 = 1$; (2) $2x_1^2 - x_2 = 3$; (3) $S_3 + 3S_2 - 4S_1 - 6S_0 = 0$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației și $S_k = x_1^k + x_2^k$ ($k = 0 ; 1 ; 2 ; 3$).

În prima ipoteză sîntem conduşi la rezolvarea sistemului:

$$3x_1 - x_2 = 1; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

$$(a = m + 1; b = -6m; c = 3(3m + 1)).$$

Din primele două ecuaţii deducem:

$$x_1 = \frac{a-b}{4a}; x_2 = \frac{-(a+3b)}{4a}$$

şi înlocuind în ultima ecuaţie a sistemului rezultă:

$$(b-a)(a+3b) = 16ac,$$

deci

$$(7m+1)(17m-1) = 48(m+1)(3m+1).$$

Se obţine astfel ecuaţia:

$$25m^2 + 182m + 49 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt -7 şi $-\frac{7}{25}$.

Pentru $m = -7$ rezultă $x \in \{2; 5\}$ şi pentru $m = -\frac{7}{25}$ rezultă

$$x \in \left\{-2; -\frac{1}{3}\right\}.$$

În ipoteza (2) obţinem sistemul:

$$2x_1^2 - x_2 = 3; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a},$$

a cărui rezolvare implică unele dificultăţi de calcul datorate primei ecuaţii. Pentru simplificarea rezolvării, să observăm că x_1 , fiind rădăcină a ecuaţiei propuse, verifică egalitatea $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, deci $x_1^2 = -\frac{1}{a}(bx_1 + c)$. Înlocuind în prima ecuaţie a sistemului deducem

$$-\frac{2}{a}(bx_1 + c) - x_2 = 3, \text{ deci } 2bx_1 + ax_2 = -3a - 2c. \text{ Sîntem astfel}$$

conduşi la rezolvarea sistemului:

$$2bx_1 + ax_2 = -3a - 2c; ax_1 + ax_2 = -b; x_1x_2 = \frac{c}{a}. \quad (13)$$

Eliminând x_1 între primele două ecuații ale sistemului (13) deducem $a(2b - a)x_2 = 3a^2 - 2b^2 + 2ac$. Eliminând x_2 între aceleași ecuații deducem și $(2b - a)x_1 = -3a + b - 2c$. Înmulțind, parte cu parte, ecuațiile obținute rezultă :

$$a(2b - a)^2 x_1 x_2 = (-3a + b - 2c)(3a^2 - 2b^2 + 2ac),$$

și — având în vedere ultima ecuație a sistemului (13) — obținem :

$$c(2b - a)^2 = (-3a + b - 2c)(3a^2 - 2b^2 + 2ac). \quad (13')$$

Deoarece : $2b - a = -(13m + 1)$, $-3a + b - 2c = -9(3m + 1)$;
 $3a^2 - 2b^2 + 2ac = 3(-17m^2 + 10m + 3)$ ecuația (13') se scrie :

$$(3m + 1)(4m^2 + 29m + 7) = 0,$$

de unde deducem $m \in \left\{ -7; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{4} \right\}$. Înlocuind pe rînd, valorile obținute pentru m în ecuația din enunț; obținem soluțiile problemei propuse :

$$(m = -7; x_1 = 2; x_2 = 5); \left(m = -\frac{1}{3}; x_1 = 0; x_2 = 3 \right);$$

$$\left(m = -\frac{1}{4}; x_1 = x_2 = -1 \right).$$

În ipoteza (3) vom observa că putem scrie :

$$S = x_1^0 + x_2^0 = 2; S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2;$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2].$$

Substituind :

$$x_1 + x_2 = \frac{-bm}{m+1}; x_1x_2 = \frac{3(3m+1)}{m+1},$$

deducem :

$$S_2 = \frac{6(3m^2 - 4m - 1)}{(m+1)^2}; S_3 = \frac{54m(m^2 - 4m - 1)}{(m+1)^3}.$$

Înlocuind în ecuația din enunț, rezultă :

$$12m^3 - 53m^2 - 34m - 5 = 0,$$

ecuație ale cărei rădăcini sînt : $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{4}$; 5. Procedînd ca în cazul anterior deducem soluțiile problemei :

$$\left(m = -\frac{1}{3}; x_1 = -3; x_2 = 0\right); \left(m = -\frac{1}{4}; x_1 = x_2 = -1\right);$$

$$\left(m = 5; x_1 = \frac{5 + i\sqrt{7}}{2}; x_2 = \frac{5 - i\sqrt{7}}{2}\right).$$

5) Fie ecuația :

$$(mp + m - p + 1)x^2 + (p - 1)(m + 2)x - m(3p - 1) = 0,$$

unde m, p sînt parametri complecși și $mp + m - p + 1 \neq 0$.

a) Să se determine valorile parametrului p dacă ecuația are cel puțin o rădăcină independentă de m .

b) Să se determine valorile parametrului m dacă ecuația are cel puțin o rădăcină independentă de p .

Să se rezolve ecuația în ambele cazuri.

Pentru primul caz vom observa că ecuația se scrie :

$$m[(p + 1)x^2 + (p - 1)x + 1 - 3p] + [(1 - p)x^2 + 2(p - 1)x] = 0,$$

$$\forall m [m \in \mathbb{C}], \quad (14)$$

deci va trebui să determinăm $x \in \mathbb{C}$ care verifică simultan ecuațiile :

$$(p + 1)x^2 + (p - 1)x + 1 - 3p = 0; (p - 1)(x^2 - 2x) = 0. \quad (14')$$

Dacă $p = 1$, ecuația a doua a sistemului (14') este identic verificată iar din prima ecuație, a aceluiași sistem, rezultă $x \in \{-1; 1\}$. Deci pentru $p = 1$ ecuația din enunț admite ambele rădăcini independente de m ($x_1 = -1; x_2 = 1$).

Dacă $p \neq 1$ din a doua ecuație a sistemului (14') rezultă $x = 0$ sau $x = 2$. Pentru $x = 0$ deducem din prima ecuație $p = \frac{1}{3}$ și pentru $x = 2$, din aceeași ecuație obținem $p = -1$. Înlocuind $p = \frac{1}{3}$ în ecuația (14), aceasta devine

$$m(2x^2 - x) + (x^2 - 2x) = 0,$$

deci cea de a doua soluție a ecuației (s-a găsit o soluție $x = 0$, independentă de m) este :

$$x = \frac{m + 2}{2m + 1}.$$

(Se va observa că $p = \frac{1}{3} \Rightarrow m \neq -\frac{1}{2}$, în condițiile enunțului.)

Procedînd analog și în cazul $p = -1$, se găsește a doua soluție a ecuației $x = m$.

În concluzie:

$$p = 1 \Rightarrow x \in \{-1; 1\};$$

$$p = \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left\{0; \frac{m+2}{2m+1}\right\};$$

$$p = -1 \Rightarrow x \in \{2; m\}.$$

Pentru a rezolva punctul b) al problemei vom observa că putem scrie:

$$p[(m-1)x^2 + (m+2)x - 3m] + [(m+1)x^2 - (m+2)x + m] = 0, \\ \forall p[p \in \mathbb{C}], \quad (14'')$$

ceea ce conduce la rezolvarea sistemului.

$$(m-1)x^2 + (m+2)x - 3m = 0; \quad (m+1)x^2 - (m+2)x + m = 0. \quad (14''')$$

Adunînd între ele, parte cu parte, cele două ecuații, deducem

$$m(x^2 - 1) = 0.$$

Dacă $m = 0$, din sistemul (14''') rezultă $x \in \{0; 2\}$. Dacă $m \neq 0$ rezultă $x = -1$ sau $x = 1$. Înlocuind $x = 1$ în prima ecuație a sistemului (14''') deducem $m = 1$ și procedînd ca în cazul precedent din ecuația (14'') rezultă cea de a doua rădăcină $x = \frac{1-3p}{2}$. Analog, pentru $x = -1$ deducem $m = -1$ și a doua rădăcină a ecuației (14'') este $x = \frac{3p-1}{2p}$. Răspunsul la punctul b) al problemei este deci:

$$m = 0 \Rightarrow x \in \{0; 2\}$$

$$m = -1 \Rightarrow x \in \left\{-1; \frac{3p-1}{2p}\right\}$$

$$m = 1 \Rightarrow x \in \left\{1; \frac{1-3p}{2}\right\}.$$

6) Să se discute natura și semnele rădăcinilor reale ale ecuației:

$$(2m+1)x^3 - 3x^2 - 3x + (2m+1) = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Pentru rezolvare vom observa că ecuația din enunț (ecuație reciprocă de gradul 3) se mai scrie sub forma:

$$(x+1)[(2m+1)x^2 - 2(m+2)x + (2m+1)] = 0.$$

Rezultă că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$ ecuația admite rădăcina $x_1 = -1$, în continuare problema reducându-se la discutarea naturii și semnelor rădăcinilor reale ale ecuației de gradul doi:

$$(2m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + (2m + 1) = 0, m \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Dacă $m \neq -\frac{1}{2}$, discriminantul ecuației este $\Delta = (m + 2)^2 - (2m + 1)^2 = 3(1 - m^2)$. În plus, x_2 și x_3 fiind rădăcinile ecuației, avem și:

$$P = x_1 x_2 = 1; S = x_1 + x_2 = \frac{2(m + 2)}{2m + 1}.$$

Pentru $m = -\frac{1}{2}$ ecuația (15) are gradul întâi și rădăcina $x = 0$.

Sintetizînd în tabelul numărul 3 observațiile asupra ecuației (15), răspunsul pentru problema propusă este următorul:

$m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ — ecuația admite o rădăcină reală $x_1 = -1$ și două rădăcini complexe conjugate;

$m = -1$ — ecuația admite trei rădăcini reale egale ($x_1 = x_2 = x_3 = -1$);

$m = 1$ — ecuația admite trei rădăcini reale; $x_1 = -1$; $x_2 = x_3 = 1$;

$m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ — ecuația admite trei rădăcini reale $x_1 = -1$; $x_2 < x_3 < 0$;

$m = -\frac{1}{2}$ — ecuația admite două rădăcini reale $x_1 = -1$; $x_2 = 0$;

$m \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ — ecuația admite trei rădăcini reale $x = -1$; $x_2 > x_3 > 0$.

7) Să se discute natura și semnele rădăcinilor reale ale ecuației

$$mx^4 + 2m(m - 2)x^2 + 5m - 4 = 0, m \in \mathbb{R}^*.$$

Pentru rezolvare, vom observa că notînd $x^2 = y$, sîntem iarăși conduși la discutarea naturii și semnelor rădăcinilor reale ale unei ecuații de gradul doi:

$$my^2 + 2m(m - 2)y + 5m - 4 = 0, m \in \mathbb{R}^*. \quad (16)$$

Discriminantul ecuației (16) este $\Delta = m^2(m-2)^2 - m(5m-4) = m^4 - 4m^3 - m^2 + 4m = m(m+1)(m-1)(m-4)$. Rădăcinile aceleiași ecuații fiind y_1 și y_2 avem și:

$$S = y_1 + y_2 = -2(m-2); P = y_1 y_2 = \frac{5m-4}{m}.$$

Rezultatele referitoare la ecuația (16) sunt prezentate în tabelul numărul 4. Deoarece rădăcinile ecuației din enunț sunt:

$$x_1 = -\sqrt{y_1}; x_2 = \sqrt{y_1}; x_3 = -\sqrt{y_2}; x_4 = \sqrt{y_2}.$$

| m | Δ | P | S | Natura și semnele rădăcinilor ecuației (15) |
|-----------|----------|-----|-----|---------------------------------------------|
| $-\infty$ | - | + | + | Rădăcini complexe conjugate |
| -2 | - | + | 0 | |
| -1 | 0 | | - | $x_2 = x_3 = -1$ |
| | + | + | - | Rădăcini reale diferite $x_2 < x_3 < 0$ |
| -1/2 | = | = | = | Ecuație de gr. I $x_2 = 0$ |
| | + | + | + | Rădăcini reale diferite $x_2 > x_3 > 0$ |
| 1 | 0 | | | $x_2 = x_3 = 1$ |
| | - | + | + | Rădăcini complexe conjugate |
| $+\infty$ | | | | |

TABELUL NR. 3

| m | Δ | P | S | Natura și semnele rădăcinilor ecuației (16) |
|-----------|----------|-----|-----|------------------------------------------------------------------|
| $-\infty$ | + | + | + | Răd. reale dif. $y_1 > y_2 > 0$ |
| -1 | 0 | | | $y_1 = y_2 > 0$ |
| | - | + | + | Rădăcini complexe conjugate |
| 0 | = | = | = | |
| | - | + | + | Rădăcini reale diferite $y_1 < 0 < y_2$ |
| 4/5 | + | 0 | + | Rădăcini reale diferite $y_1 = 0, y_2 > 0$ $y_1 > y_2 > 0$ |
| 1 | 0 | + | + | $y_1 = y_2 > 0$ |
| 2 | - | + | 0 | Rădăcini complexe conjugate |
| 4 | 0 | + | - | $y_1 = y_2 < 0$ |
| | + | + | - | Răd. reale diferite $y_1 < y_2 < 0$ |
| $+\infty$ | | | | |

TABELUL NR. 4

răspunsul la problema propusă este următorul:

$$m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{4}{5}; 1\right)$$

$$m \in \{-1; 1\}$$

- ecuația are patru rădăcini reale diferite, două din ele fiind opuse celorlalte două;
- ecuația are patru rădăcini reale, $x_1 = x_3 = -x_2 = -x_4$;

$m \in (-1; 0) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$ — ecuația are patru rădăcini complexe, două din ele fiind conjugate respectiv celorlalte două;

$m \in \left(0; \frac{4}{5}\right)$ — ecuația are două rădăcini reale opuse și două rădăcini complexe conjugate;

$m = \frac{4}{5}$ — ecuația are patru rădăcini reale $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -x_4$;

$m = 4$ — ecuația are patru rădăcini complexe $x_1 = x_3; x_2 = x_4$.

8) Dintre toate triunghiurile dreptunghice înscrise în același cerc, să se determine triunghiul de perimetru maxim.

Fie R lungimea razei cercului. Deoarece ipotenuza triunghiului dreptunghic înscris în cerc este un diametru al cercului, rezultă că lungimea ipotenuzei este $2R$. Lungimea unei catete fiind x , cealaltă catetă are lungimea $\sqrt{4R^2 - x^2}$. În fine, dacă $2p$ este perimetrul, rezultă:

$$2p = 2R + x + \sqrt{4R^2 - x^2}$$

de unde obținem ecuația:

$$x^2 - 2(p - R)x + 2p(p - 2R) = 0. \quad (17)$$

Pentru ca ecuația (17) să admită rădăcinile reale este necesar și suficient să avem:

$$\Delta = (p - R)^2 - 2(p^2 - 2pR) \geq 0,$$

de unde deducem:

$$p^2 - 2pR - R^2 \leq 0,$$

ceea ce conduce la:

$$0 < \frac{p}{R} \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Deoarece $p \leq R(1 + \sqrt{2})$ rezultă $p_{max} = R(1 + \sqrt{2})$ și în acest caz ecuația (17) are rădăcina dublă

$$x_0 = p_{max} - R = R\sqrt{2},$$

deci triunghiul este isoscel.

Am demonstrat astfel că dintre toate triunghiurile dreptunghice înscrise în același cerc, triunghiul de perimetru maxim este triunghiul dreptunghic isoscel.

§ 4. ECUAȚII ALGEBRICE DE GRAD MAI MARE DECÎT DOI

4.1. UNELE TRANSFORMATE ALE ECUAȚIILOR ALGEBRICE

Pentru o mai bună înțelegere a celor ce urmează vom începe prin prezentarea unor proprietăți ale funcției:

$$f: \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}, f(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \quad (13)$$

unde a, b, c, d sînt numere complexe astfel încît $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Deoarece:

$$f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow \frac{at_1 + b}{ct_1 + d} = \frac{at_2 + b}{ct_2 + d} \Rightarrow \frac{(ad - bc)(t_1 - t_2)}{(ct_1 + d)(ct_2 + d)} = 0 \Rightarrow t_1 = t_2,$$

rezultă că funcția este injectivă.

În plus dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$, deducem:

$$f(t) = z \Leftrightarrow \frac{at + b}{ct + d} = z \Rightarrow (cz - a)t = b - dz \Rightarrow t = \frac{b - dz}{cz - a} \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\},$$

ceea ce demonstrează surjectivitatea funcției f .

Atribuind diferite valori parametrilor a, b, c, d , obținem din (13) forme particulare, printre care:

$$f(t) = t + h (h \in \mathbb{C}); f(t) = kt (k \in \mathbb{C}^*); f(t) = -t; f(t) = \frac{1}{t}. \quad (13')$$

Fie polinomul:

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X], n \geq 1, a_n \neq 0.$$

Dacă în ecuația $p(z) = 0$, atașată polinomului p , substituim $z = f(t)$, obținem ecuația:

$$a_n(at + b)^n + a_{n-1}(at + b)^{n-1}(ct + d) + \dots + a_1(at + b)(ct + d)^{n-1} + a_0(ct + d)^n = 0.$$

numită „ecuația transformată în $f(t)$ ” (pe scurt „transformată în $f(t)$ ”) a ecuației $p(z) = 0$.

Se observă că dacă $\frac{a}{c}$ este o rădăcină a ecuației $p(z) = 0$, gradul transformatei este strict mai mic decît n , iar dacă $\frac{a}{c}$ nu este rădăcină a ecuației $p(z) = 0$, gradul transformatei este n .

Fie z_1, z_2, \dots, z_n , rădăcinile ecuației $p(z) = 0$. În legătură cu cazurile particulare (18'), facem observația că relațiile:

$$z = t + h, z = kt \ (k \in \mathbb{C}^*), z = -t, z = \frac{1}{t}$$

permit obținerea de informații asupra rădăcinilor transformatei. Deducem:

- rădăcinile transformatei în $t + h$ sînt $z_1 - h, z_2 - h, \dots, z_n - h$,
- rădăcinile transformatei în kt sînt $\frac{1}{k}z_1, \frac{1}{k}z_2, \dots, \frac{1}{k}z_n$,
- rădăcinile transformatei în $-t$ sînt $-z_1, -z_2, \dots, -z_n$,
- rădăcinile transformatei în $\frac{1}{t}$ sînt $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_n}$, dacă $a_n \neq 0$.

Prezentăm în continuare două probleme, a căror rezolvare este mult ușurată datorită utilizării ecuațiilor transformate.

Exemple: 1) Să se rezolve ecuația $p(z) = 0$, unde

$$p = X^4 - 7X^3 + 15X^2 - 7X - 6,$$

știind că diferența a două rădăcini este 1.

Abordarea problemei cu ajutorul relațiilor între rădăcini și coeficienți nu este recomandabilă, datorită dificultăților de calcul ce se întîmpină în rezolvarea sistemului care rezultă. O soluție, mai economică din punct de vedere al calculului, este cea care urmează.

Conform enunțului rădăcinile ecuației $p(z) = 0$ sînt $a, a - 1, b, c$. Deci ecuația $p(z + 1) = 0$ are rădăcinile $a - 1, a - 2, b - 1, c - 1$. Rezultă că ecuațiile $p(z) = 0$ și $p(z + 1) = 0$ admit rădăcina comună $a - 1$. Deoarece $p(z + 1) = z^4 - 3z^3 + 6z - 4$, sîntem conduși la a afla un cel mai mare divizor comun al polinoamelor p și $q = X^4 - 3X^3 + 6X - 4$. Găsim $X - 2$, deci $a - 1 = 2$, sau $a = 3$ și se cunosc astfel două rădăcini ale ecuației $p(z) = 0$. Acestea sînt $a = 3$ și $a - 1 = 2$. În continuare se află și rădăcinile $b = 1 - \sqrt{2}$; $c = 1 + \sqrt{2}$.

Propunem ca exercițiu rezolvarea ecuației $z^4 + 6z^3 + 17z^2 + 24z + 18 = 0$, cunoscînd că diferența a două rădăcini este 1.

2) Fie $p = X^3 - 3mX^2 - 9X + 7m \in \mathbb{C}[X]$. Să se rezolve ecuația $p(z) = 0$, cunoscînd că produsul a două rădăcini este -2 .

Vom observa, întîi, că pentru $m = 0$, ecuația $p(z) = 0$ admite rădăcinile $-3; 0; 3$ și condițiile enunțului nu sînt verificate. Putem deci presupune $m \neq 0$ și în acest caz $p(0) \neq 0$.

Dacă $a, -\frac{2}{a}$ și b sînt rădăcinile ecuației $p(z) = 0$, rădăcinile transformatei în $-\frac{2}{z}$ sînt $-\frac{2}{a}, a$ și $-\frac{2}{b}$, deci ecuațiile:

$$z^3 - 3mz^2 - 9z + 7m = 0 \text{ și } 7mz^3 + 18z^2 - 12mz - 8 = 0 \quad (19)$$

admit două rădăcini comune.

Sintem astfel conduși la rezolvarea sistemului (19), necunoscutele fiind m și z . Prin eliminarea lui m între cele două ecuații, rezultă :

$$z^6 - 3z^4 - 6z^2 + 8 = 0,$$

ecuație ale cărei rădăcini sînt : $-2 ; -1 ; 1 ; 2 ; i\sqrt{2} ; -i\sqrt{2}$.

Deducem că sistemul (19) are soluțiile :

$$(2 ; -2) , (-2 ; 2) , (-2 ; 1) , (2 ; -1) , \left(\frac{11i\sqrt{2}}{13} ; i\sqrt{2} \right) ,$$

$$\left(-\frac{11i\sqrt{2}}{13} ; -i\sqrt{2} \right).$$

Deci pentru $m = 2$ ecuația $p(z) = 0$ are rădăcinile $-2 ; 1 ; 7$ și pentru $m = -2$ are rădăcinile $2 ; -1 ; -7$. Pentru celelalte valori ale parametrului m condițiile enunțului nu sînt îndeplinite.

Ca exercițiu, propunem spre rezolvare ecuația $z^3 - 3(2m+1)z^2 + 6(2m-1)z + 8(m+1) = 0$, $m \in \mathbb{C}$, știind că diferența a două rădăcini este 3.

4.2. OBSERVAȚII ASUPRA UNOR FUNCȚII POLINOMIALE SIMETRICE ȘI APLICAȚII ALE RELAȚIILOR ÎNTRE RĂDĂCINILE ȘI COEFICIENȚII UNEI ECUAȚII ALGEBRICE

Fie polinomul :

$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$, avînd rădăcinile z_1, z_2, \dots, z_n . Putem deci scrie și

$$p = a_n (X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n).$$

Facem următoarele notații :

$$S_h = z_1^h + z_2^h + \dots + z_n^h, \quad h \in \mathbb{Z};$$

Putem scrie :

$$a_n (X - z_2)(X - z_3) \dots (X - z_n) = \frac{p}{X - z_1};$$

$$a_n (X - z_1)(X - z_3) \dots (X - z_n) = \frac{p}{X - z_2};$$

$$\begin{aligned} a_n (X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_{k-1})(X - z_{k+1}) \dots (X - z_n) = \\ = \frac{p}{X - z_k} \quad (1 < k < n). \end{aligned}$$

Dp fiind derivata formală a polinomului p , avem :

$$Dp = \frac{p}{x - z_1} + \frac{p}{x - z_2} + \dots + \frac{p}{x - z_n} \quad (20)$$

și

$$Dp = na_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1} X^{n-2} + \dots + 2a_2 X + a_1. \quad (20')$$

Deoarece $X - z_k \mid p$, oricare ar fi $k = 1, 2, \dots, n$, utilizînd schema lui Hörner-Ruffini, deducem :

$$\begin{aligned} \frac{p}{X - z_k} = & a_n X^{n-1} + (a_n z_k + a_{n-1}) X^{n-2} + (a_n z_k^2 + a_{n-1} z_k + a_{n-2}) X^{n-3} + \\ & + \dots + (a_n z_k^{n-1} + a_{n-1} z_k^{n-2} + \dots + a_2 z_k + a_1) \end{aligned}$$

și din (20), rezultă :

$$\begin{aligned} Dp = & na_n X^{n-1} + (a_n S_1 + na_{n-1}) X^{n-2} + (a_n S_2 + a_{n-1} S_1 + \\ & + na_{n-2}) X^{n-3} + \dots + (a_n S_{n-1} + a_{n-1} S_{n-2} + \dots + a_2 S_1 + na_1) = 0. \end{aligned} \quad (20'')$$

Din (20') și (20'') deducem următoarele relații :

$$\begin{cases} a_n S_1 + a_{n-1} S_0 & = (n-1)a_{n-1} \\ a_n S_2 + a_{n-1} S_1 + a_{n-2} S_0 & = (n-2)a_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_n S_{n-1} + a_{n-1} S_{n-2} + \dots + a_2 S_1 + a_1 S_0 & = a_1, \end{cases} \quad (20''')$$

datorate lui I. Newton.

Evidențiem că relațiile (20''') dau posibilitatea calculării sumelor S_k pentru toate valorile lui k de la 1 la $n-1$.

Să observăm acum că putem scrie $p(z_1) = p(z_2) = \dots = p(z_n) = 0$, deci :

$$\begin{aligned} a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \dots + a_1 z_1 + a_0 &= 0 ; \\ a_n z_2^n + a_{n-1} z_2^{n-1} + \dots + a_1 z_2 + a_0 &= 0 ; \\ \vdots & \vdots \\ a_n z_n^n + a_{n-1} z_n^{n-1} + \dots + a_1 z_n + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Înmulțind ambele părți ale acestor egalități, respectiv cu $z_1^{k-n}, z_2^{k-n}, \dots, z_n^{k-n}$, unde $k \in \mathbb{Z}$ și adunînd parte cu parte egalitățile obținute, deducem relația de recurență :

$$a_n S_k + a_{n-1} S_{k-1} + \dots + a_1 S_{k-n+1} + a_0 S_{k-n} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

În concluzie relațiile (20''') și relația de recurență (21) oferă posibilitatea calculării sumelor S_k , oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru a demonstra utilitatea relațiilor (20''') și (21) să calculăm S_{-2} și S_5 în cazul :

$$p = X^4 + X^3 + X^2 - X + 1.$$

Deducem imediat $S_0 = 4$, $S_1 = -1$, $S_2 = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_3z_4) = 1 - 2 = -1$.

Din (20''') obținem $S_3 + S_2 + S_1 - S_0 = -1$ și avînd în vedere rezultatele de mai înainte — deducem $S_3 = 5$.

Fie acum relația de recurență :

$$S_k + S_{k-1} + S_{k-2} - S_{k-3} + S_{k-4} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Punînd $k = 4$ rezultă $S_4 + S_3 + S_2 - S_1 + S_0 = 0$. Deci $S_4 = -9$.

Dînd, în aceeași relație (22), valoarea 5 lui k , avem $S_5 + S_4 + S_3 - S_2 + S_1 = 0$, de unde obținem $S_5 = 4$.

Dacă în (22) facem $k = 3$, rezultă $S_3 + S_2 + S_1 - S_0 + S_{-1} = 0$, de unde $S_{-1} = S_0 - S_1 - S_2 - S_3 = 1$.

În fine, pentru $k = 2$, deducem tot din (22) : $S_2 + S_1 + S_0 - S_{-1} + S_{-2} = 0$ și de aici $S_{-2} = -1$.

În continuare prezentăm trei exemple, de aplicare a relațiilor între rădăcini și coeficienți la rezolvarea unor probleme de algebră.

Exemple : 1) Oricare ar fi numerele complexe a, b, c se verifică egalitatea :

$$12[(a-b)^7 + (b-c)^7 + (c-a)^7] = -7[(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3][(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]^2.$$

Notînd $a-b = z_1$, $b-c = z_2$, $c-a = z_3$, să observăm că numerele z_1, z_2, z_3 sînt rădăcinile unei ecuații de forma :

$$z^3 + pz + q = 0. \quad (23)$$

Avem deci de demonstrat egalitatea $12S_7 = 7S_3 \cdot S_2^2$.

Scriind relația de recurență (21) pentru ecuația (23), dînd pe rînd lui k valorile 3, 4, 5, 7 și avînd în vedere $S_1 = 0$, $S_2 = -2p$, problema se rezolvă imediat.

2) Să se rezolve sistemul :

$$x + y + z = -1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9; \quad x^3 + y^3 + z^3 = -1.$$

Notînd $x + y + z = p_1$, $xy + yz + zx = p_2$, $xyz = p_3$, numerele x, y, z , care verifică sistemul, sînt rădăcinile ecuației :

$$t^3 - p_1t^2 + p_2t - p_3 = 0. \quad (24)$$

Cunoaștem $S_1 = -1$, $S_2 = 9$, $S_3 = -1$. Deoarece $S_1 = p_1$, $S_2 = p_1^2 - 2p_2$, deducem $p_2 = -4$.

Relația de recurență (21), pentru ecuația (24) și $k = 3$, conduce la :

$$S_3 - p_1 S_2 + p_2 S_1 - 3p_3 = 0.$$

Deducem de aici $p_3 = 4$.

Ecuația (24) se scrie acum $t^3 + t^2 - 4t - 4 = 0$ și are rădăcinile $t_1 = -2$; $t_2 = -1$, $t_3 = 2$.

Deci sistemul propus pentru rezolvare are soluțiile $(-2; -1; 2)$; $(-2; 2; -1)$; $(-1; -2; 2)$; $(-1; 2; -2)$; $(2; -2; -1)$; $(2; -1; -2)$.

3) Să se rezolve ecuația $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ($p, q, r \in \mathbb{C}$), știind că rădăcinile sînt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice și trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Dacă x_1, x_2, x_3 sînt cele trei rădăcini ale ecuației, sîntem conduși a face ipotezele :

$$a) \begin{cases} \div x_1, x_2, x_3 \\ \div x_1, x_2, x_3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \div x_1, x_2, x_3 \\ \div x_1, x_3, x_2 \end{cases}$$

(Se deduce imediat că celelalte situații, legate de ordinea rădăcinilor în progresia geometrică, conduc la una din ipotezele anterioare, reîntîcind eventual rădăcinile.)

În prima ipoteză putem pune $x_1 = a - b$, $x_2 = a$, $x_3 = a + b$. Deoarece $x_2^2 = x_1 x_3$, deducem $a^2 = a^2 - b^2$, deci $b = 0$. Rezultă $x_1 = x_2 = x_3 = a$ și ecuația din enunț se scrie $(x - a)^3 = 0$, sau $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$, ceea ce conduce la :

$$p = -3a; q = 3a^2; r = -a^3. \quad (25)$$

Din prima relație (25) rezultă $a = -\frac{p}{3}$ și înlocuind în celelalte două relații obținem condiția de rezolvabilitate a problemei :

$$p^2 - 3q = 0; p^3 - 27r = 0,$$

rădăcinile ecuației fiind $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{p}{3}$.

În ipoteza b) avem $x_1 = a - b$, $x_2 = a$, $x_3 = a + b$ și din condiția $x_1^2 = x_2 x_3$ deducem $b(b + 3a) = 0$. Deoarece $b = 0$ conduce la cazul rezolvat anterior, rezultă $b = -3a$, deci rădăcinile ecuației sînt $x_1 = 4a$, $x_2 = a$, $x_3 = -2a$.

Utilizînd relațiile între rădăcini și coeficienți, putem scrie :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = q \\ x_1 x_2 x_3 = -r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -p \\ -6a^2 = q \\ -8a^3 = -r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{p}{3} \\ 2p^2 + 3q = 0 \\ 8p^3 + 27r = 0. \end{cases}$$

Deducem că pentru $2p^2 + 3q = 8p^3 + 27r = 0$ ecuația admite rădăcinile $x_1 = -\frac{4p}{3}$; $x_2 = -\frac{p}{3}$; $x_3 = \frac{2p}{3}$, verificând ipoteza b).

4) Să se rezolve $x^3 + 3mx^2 - x - (11m + 8) = 0$, $m \in \mathbb{Z}$, în fiecare din ipotezele:

a) $x_1 + x_2 = x_3$; b) $x_1 x_2 = 3$,
 x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației.

Dacă $x_1 + x_2 = x_3$, cum $x_1 + x_2 + x_3 = -3m$, deducem $2x_3 = -3m$, deci $x_3 = -\frac{3m}{2}$.

Înlocuind $x_3 = -\frac{3m}{2}$ în ecuație deducem:

$$27m^3 - 76m - 64 = 0. \quad (26)$$

Observînd că ecuația (26) admite rădăcina întreagă $m_1 = 2$ și două rădăcini $m_2, m_3 \in \mathbb{C}$, rezultă că ecuația din enunț se scrie în acest caz:

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0,$$

avînd rădăcina $x_3 = -3$. Se deduc imediat $x_1 = -5$; $x_2 = 2$.

În ipoteza b), utilizînd și relațiile între rădăcini și coeficienți, deducem sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3m \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -1 \\ x_1 x_2 x_3 = 11m + 8 \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3m & (a) \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 = -4 & (b) \\ 3x_3 = 11m + 8 & (c) \\ x_1 x_2 = 3 & (d) \end{cases}$$

Datorită ecuațiilor (a) și (b) deducem $x_3(-3m - x_3) = -4$, deci $x_3^2 + 3mx_3 - 4 = 0$ și substituind $x_3 = \frac{11m+8}{3}$, din (c), rezultă:

$$55m^2 + 62m + 7 = 0. \quad (26')$$

Ecuația (26') are rădăcinile -1 și $-\frac{7}{55}$. Deoarece $m \in \mathbb{Z}$, rezultă $m = -1$, deci ecuația din enunț este

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0,$$

avînd rădăcina $x_3 = -1$. Celelalte rădăcini sînt $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

5) Fie p un polinom de grad $n \geq 2$, cu coeficienți reali, avînd rădăcinile z_1, z_2, \dots, z_n , diferite de zero și numărul natural $k \in [1; n-1]$. Notăm:

$$A = \sum z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_k} z_{i_{k+1}} \cdot \dots \cdot z_{i_n},$$

suma fiind extinsă la toate permutările (i_1, i_2, \dots, i_n) ale numerelor $1, 2, \dots, n$. Să se demonstreze că A este număr real.

Fie pentru rezolvare polinomul :

$$q = \left(X - \frac{\bar{z}_1}{z_1}\right) \left(X - \frac{\bar{z}_2}{z_2}\right) \dots \left(X - \frac{\bar{z}_n}{z_n}\right) = X^n + b_1 X^{n-1} + \dots + b_{n-1} X + b_n$$

Dacă z_k, \bar{z}_k sînt două rădăcini complexe conjugate ale polinomului p , putem scrie

$$\left(X - \frac{\bar{z}_k}{z_k}\right) \left(X - \frac{z_k}{\bar{z}_k}\right) = X^2 - \left(\frac{\bar{z}_k}{z_k} + \frac{z_k}{\bar{z}_k}\right) X + \frac{\bar{z}_k \cdot z_k}{z_k \cdot \bar{z}_k} \in \mathbb{R}[X],$$

deoarece numerele complexe $\frac{\bar{z}_k}{z_k}$ și $\frac{z_k}{\bar{z}_k}$ sînt conjugate.

Se deduce imediat $q \in \mathbb{R}[X]$. Putem deci scrie :

$$A = (z_1 z_2 \dots z_n) \sum \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_k}{z_1 z_2 \dots z_k} = (-1)^k b_k, \quad z_1 z_2 \dots z_n \in \mathbb{R}.$$

4.3. APLICAȚII LA STABILIREA NUMĂRULUI RĂDĂCINILOR REALE ALE UNEI ECUAȚII ALGEBRICE CU COEFICIENȚI REALI

Pentru stabilirea numărului rădăcinilor reale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali nu se poate indica un procedeu cu caracter general contribuția rezolvitorului fiind esențială pentru fiecare problemă în parte. În exemplele 1 și 2 vom prezenta rezolvarea a două probleme, utilizînd procedee care aparțin algebrei. În celelalte exemple vom apela, pentru rezolvare, la unele rezultate ale calculului diferențial (O consecință a teoremei lui Rolle și metoda grafică.)

Exemple : 1) Dacă a_1, a_2, a_3, a_4 sînt numere reale și $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ să se arate că ecuația :

$$(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) + (x - a_1)(x - a_3)(x - a_4) + (x - a_1)(x - a_2)(x - a_4) + (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = 0$$

are toate rădăcinile reale.

Notînd prin $p(x)$ partea întîia a ecuației, deducem :

$$p(a_1) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4) < 0;$$

$$p(a_2) = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) > 0;$$

$$p(a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4) < 0;$$

$$p(a_4) = (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) > 0.$$

Deoarece $a_1 < a_2$, $p(a_1) \cdot p(a_2) < 0$, avînd în vedere continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = p(x)$, rezultă că ecuația $p(x) = 0$ admite cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(a_1; a_2)$. Procedînd în mod ana-

log, deducem că ecuația admite cel puțin o rădăcină reală în fiecare din intervalele $(a_2; a_3)$ și $(a_3; a_4)$. Gradul ecuației fiind 3, rezultă că ecuația are trei rădăcini reale x_1, x_2, x_3 , îndeplinind condiția:

$$a_1 < x_1 < a_2 < x_2 < a_3 < x_3 < a_4.$$

Facem observația că în același mod se rezolvă problema dacă se consideră ecuația:

$$k(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) + h(x - a_1)(x - a_3)(x - a_4) + l(x - a_1)(x - a_2)(x - a_4) + m(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = 0, \text{ unde } k, h, l, m \text{ sînt numere reale strict pozitive.}$$

2) Să se determine zerourile funcției $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x(x-1) + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}x(x-1)\dots(x-n+1).$$

Vom observa că $f_1(x) = -(x-1)$, deci funcția f_1 are un singur zero $x_1 = 1$. În plus $f_2(x) = \frac{1}{2!}(x-1)(x-2)$, deci funcția f_2 are două zerouri $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$.

Sîntem astfel conduși la a face presupunerea:

$$f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!}(x-1)(x-2)\dots(x-k), \text{ unde } k \in \mathbb{N}^*. \quad (27)$$

Deducem

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f_k(x) + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}(x-1)\dots(x-k) = \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}(x-1)(x-2)\dots(x-k) + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}x(x-1)\dots(x-k) = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}(x-1)(x-2)\dots(x-k)[- (k+1) + x], \end{aligned}$$

deci

$$f_{k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}(x-1)(x-2)\dots(x-k)(x-k-1),$$

ceea ce confirmă că f_{k+1} este de forma (27).

Am demonstrat astfel egalitatea:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\dots(x-n), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că zerourile funcției f_n sînt numerele $1; 2; \dots; n$.

3) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 20 = 0$ din intervalul $[-1; 3]$.

Pentru rezolvare vom aplica următoarea consecință a teoremei lui Rolle:

Fie $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă și $x_1 < x_2$ două zerouri consecutive, din $(a; b)$, ale derivatei $f'(x)$. În aceste condiții:

- dacă $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, funcția nu se anulează pe $[x_1, x_2]$;
- dacă $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, funcția are un singur zero pe (x_1, x_2) .

În plus facem precizarea că dacă f este funcție polinomială și $f(x_1) = 0$, sau $f(x_2) = 0$, atunci x_1 , respectiv x_2 , este zero al funcției de ordin de multiplicitate strict mai mare ca unu.

Considerind funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 20$ derivabilă pe domeniul ei de definiție, putem scrie $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 48x + 48$, deci:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1; 2\}.$$

Deducem: $f(-2) = -132$; $f(1) = 3$; $f(2) = -4$. În plus limitele funcției f la $-\infty$ și la $+\infty$ sînt ambele $+\infty$. Cu aceste date alcătuim următorul tabel:

| x | $-\infty$ | -2 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|--------|-----------|--------|-----|------|-----------|
| $f(x)$ | $+\infty$ | -132 | 3 | -4 | $+\infty$ |

Rezultă de aici că ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale și în plus

$$x_1 < -2 < x_2 < 1 < x_3 < 2 < x_4.$$

Deoarece $f(-1) = -85$ rezultă $-1 < x_2 < 1$. Analog din $f(3) = 43$ deducem: $x_4 < 3$.

În concluzie ecuația din enunț are patru rădăcini reale diferite ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), dintre care trei (x_2, x_3, x_4) aparțin intervalului $[-1; 3]$.

4) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, din intervalul $[-1; 3]$. Discuție.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + m$, derivabilă pe \mathbb{R} . Procedînd ca în cazul anterior obținem zerourile derivatei funcției: $-2; 1; 2$ și $f(-2) = m - 112$, $f(1) = m + 23$, $f(2) = m + 16$.

În plus $f(-1) = m - 65$, $f(3) = m + 63$. Putem astfel alcătui tabelul următor:

| x | $-\infty$ | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $m - 112$ | $m - 65$ | $m + 23$ | $m + 16$ | $m + 63$ | $+\infty$ |

Deoarece răspunsul, în funcție de valorile parametrului real m , se poate da de aici cu oarecare dificultate, alcătuim tabelul numărul 5, după care putem afirma:

$m < -63$ — ecuația nu are rădăcini în $[-1; 3]$;

$m = -63$ — ecuația are o singură rădăcină $x_1 = 3$ în $[-1; 3]$;

$-63 < m < -23$ — ecuația are o singură rădăcină x_1 în $[-1; 3]$.

Avem $2 < x_1 < 3$;

$m = -23$ — ecuația are trei rădăcini în $[-1; 3]$. Avem $x_1 = x_2 = 1$, $2 < x_3 < 3$;

$-23 < m < -16$ — ecuația are trei rădăcini în $[-1; 3]$. Avem $x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3$;

$m = -16$ — ecuația are trei rădăcini în $[-1; 3]$. Avem $x_1 < 1$, $x_2 = x_3 = 2$;

$-16 < m < 65$ — ecuația are o singură rădăcină în $[-1; 3]$. Avem $x_1 < 1$;

$m = 65$ — ecuația are două rădăcini în $[-1; 3]$. Avem $x_1 = x_2 = -1$;

$m > 65$ — ecuația nu are rădăcini în $[-1; 3]$.

| m | $-\infty$ | -72 | -63 | -23 | -16 | 65 | $+\infty$ |
|-----------|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $m-72$ | $m-63$ | $m+23$ | $m+16$ | $m+63$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | + | - | - | - | - | - | + |
| -63 | + | - | - | - | - | 0 | + |
| -23 | + | - | - | 0 | - | + | + |
| -16 | + | - | - | + | 0 | + | + |
| 65 | + | - | 0 | + | + | + | + |
| 112 | + | 0 | + | + | + | + | + |
| $+\infty$ | + | + | + | + | + | + | + |

TABELUL NR. 5

5) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3(m-1)x^2 - 12mx + 8m$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = 0$.
Discuție.

Procedând ca și în exemplul precedent putem scrie $f'(x) = 3x^2 + 6(m-1)x - 12m$, $x \in \mathbb{R}$ și deducem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2m; 2\}$.

În plus $f(-2m) = 4m(m+1)(m+2)$; $f(2) = -4(m+1)$. Variația semnelor în funcție de valorile parametrului m , pentru $f(-2m)$ și $f(2)$ este prezentată în următorul tabel:

| m | $-\infty$ | -2 | -1 | 0 | $+\infty$ |
|----------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $f(-2m)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |
| $f(2)$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ |

În fine, notînd $-2m = \alpha$, $2 = \beta$, și deoarece $\beta - \alpha = 2(m+1)$ rezultă:

$$m < -1 \Rightarrow \beta < \alpha;$$

$$m = -1 \Rightarrow \beta = \alpha;$$

$$m > -1 \Rightarrow \alpha < \beta.$$

Rezultă că vor trebui analizate în parte fiecare din cazurile $m < -1$, $m = -1$ și $m > -1$. Pentru cazurile $m < -1$ și $m > -1$ alcătuim următoarele tabele:

Cazul $m < -1$

Cazul $m > -1$

| $m \backslash x$ | $-\infty$ | 2 | $-2m$ | $+\infty$ |
|------------------|-----------|--------|----------|-----------|
| $f(x)$ | $-$ | $f(2)$ | $f(-2m)$ | $+$ |
| $-\infty$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| -2 | $-$ | $+$ | 0 | $+$ |
| -1 | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |

| $m \backslash x$ | $-\infty$ | $-2m$ | 2 | $+\infty$ |
|------------------|-----------|----------|--------|-----------|
| $f(x)$ | $-$ | $f(-2m)$ | $f(2)$ | $+$ |
| -1 | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| 0 | $-$ | 0 | $-$ | $+$ |
| $+\infty$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Pentru $m = -1$ se deduce $f(x) = x^3 - 6x^2 = 12x - 8$, de unde $f'(x) = 3(x-2)^2$. Rezultă:

| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $f(x)$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

Răspunsul la problema propusă este deci:

- $m < -2$ — ecuația are trei rădăcini reale ($x_1 < 2 < x_2 < -2m < x_3$);
- $m = -2$ — ecuația are trei rădăcini reale ($x_1 < 2$, $x_2 = x_3 = 4$);
- $-2 < m < -1$ — ecuația are o singură rădăcină reală ($x_1 < 2$) și două rădăcini complexe conjugate;

- $m = -1$ — ecuația are trei rădăcini reale egale ($x_1 = x_2 = x_3 = 2$);
 $-1 < m < 0$ — ecuația are o singură rădăcină reală ($x_1 > 2$) și două rădăcini complexe conjugate;
 $m = 0$ — ecuația are trei rădăcini reale ($x_1 = x_2 = 0$, $x_3 > 2$);
 $m > 0$ — ecuația are trei rădăcini reale ($x_1 < -2m < x_2 < 2 < x_3$).

6) Să se determine, în funcție de valorile parametrului real m , numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x^3 + (m - 2)x^2 + 2(m - 2)x + m = 0.$$

Vom prezenta o rezolvare a problemei utilizând „metoda grafică”. Pentru aceasta să observăm că ecuația din enunț este echivalentă cu $x^3 - 2x^2 - 4x = -m(x + 1)^2$ și deoarece $x \neq -1$, putem scrie:

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + 4x}{(x + 1)^2} = m. \quad (28)$$

Considerînd funcțiile definite prin:

$$y = \frac{-x^3 + 2x^2 + 4x}{(x + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad (28')$$

și

$$y = m, \quad x \in \mathbb{R} \quad (28'')$$

este evident că soluțiile ecuației (28) sînt abscisele punctelor de intersecție ale graficelor celor două funcții.

Pentru graficul funcției (28') deducem:

$$y' = -\frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{(x + 1)^3},$$

ceea ce permite să întocmim următorul tabel de variație:

| x | $-\infty$ | -2 | $1 - \sqrt{5}$ | -1 | 0 | 1 | $1 + \sqrt{5}$ | $+\infty$ |
|------|-----------|------|----------------|-----------|-----------|-----|----------------|-----------|
| y' | $-$ | 0 | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |
| y | $+\infty$ | 8 | 0 | $-\infty$ | $-\infty$ | 0 | $\frac{5}{4}$ | $-\infty$ |

Obținem astfel graficul funcției (28'), care este prezentat în figura numărul 1.

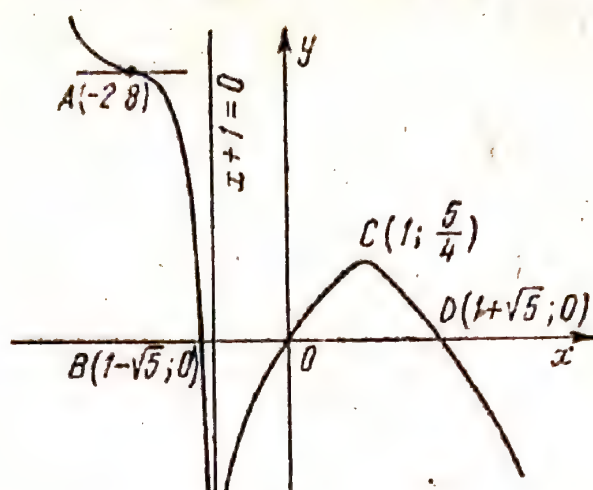


Fig. nr. 1.

Graficul funcției (28'') este o dreaptă paralelă cu axa absciselor, trecînd prin punctul variabil $(0; m)$ al axei ordinatei. În funcție de valorile parametrului real m , această dreaptă intersectează graficul (28') în puncte ale căror abscise sînt rădăcinile ecuației din enunț. Deducem:

- $m < \frac{5}{4}$ — ecuația are trei rădăcini reale: $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3$;
- $m = \frac{5}{4}$ — ecuația are trei rădăcini reale: $-2 < x_1 < -1$; $x_2 = x_3 = 1$;
- $\frac{5}{4} < m < 8$ — ecuația are o singură rădăcină reală $-2 < x_1 < -1$ și două rădăcini complexe conjugate;
- $m = 8$ — ecuația are trei rădăcini reale $x_1 = x_2 = x_3 = -2$ (deoarece în acest caz dreapta $y = m$ este tangentă graficului (28'); $x = -2$ este rădăcină multiplă și cum o ecuație algebrică de gradul trei, cu coeficienți reali, nu poate avea numai două rădăcini reale, rezultă că $x = -2$ este rădăcină triplă);
- $m > 8$ — ecuația are o singură rădăcină reală $x_1 < -2$ și două rădăcini complexe conjugate.

Observații: 1°. În general pentru stabilirea numărului rădăcinilor reale ale unei ecuații algebrice prin metoda grafică, nu se obțin informații suplimentare dacă pentru executarea graficelor se indică cu fidelitate concavitatea și asimptotele oblice sau orizontale.

2°. Pentru executarea graficului funcției (28') am determinat și punctele de intersecție ale acestuia cu axa absciselor. Aceasta ne permite să dăm detalii suplimentare în legătură cu rădăcinile reale ale ecuației

algebrice în discuție. Spre exemplu pentru $m < 0$ deducem că cele trei rădăcini reale ale ecuației sînt situate astfel: $1 - \sqrt{5} < x_1 < -1 < x_2 < 0$, $x_3 > 1 + \sqrt{5}$. Analog putem preciza și pentru $m \geq 0$. În general însă pentru determinarea intersecției graficului unei funcții de tipul (28) cu axa absciselor se întîmpină dificultăți legate de rezolvarea unor ecuații de grad mai mare decît doi, motiv pentru care în răspunsul la problema rezolvată nu am făcut precizări privind situarea rădăcinilor față de numerele $1 - \sqrt{5}$, 0 și $1 + \sqrt{5}$.

4.4. DIFERITE APLICAȚII

Exemple : 1) Să se rezolve ecuația :

$$(m+1)x^4 + (m+p-1)x^3 + (m-p+2)x^2 + (m+p-1)x + (1-p) = 0; \quad m, p \in \mathbb{R},$$

știind că admite rădăcini independente de m și p .

Dacă x_0 este o rădăcină a ecuației, care nu depinde de m și p , putem scrie :

$$(m+1)x_0^4 + (m+p-1)x_0^3 + (m-p+2)x_0^2 + (m+p-1)x_0 + (1-p) = 0,$$

oricare ar fi numerele reale m și p . Deci

$$m(x_0^4 + x_0^3 + x_0^2 + x_0) + p(x_0^3 - x_0^2 + x_0 - 1) + (x_0^4 - x_0^3 + 2x_0^2 - x_0 + 1) = 0, \quad (29)$$

pentru oricare m și p numere reale. Rezultă :

$$x_0^4 + x_0^3 + x_0^2 + x_0 = 0; \quad x_0^3 - x_0^2 + x_0 - 1 = 0; \quad x_0^4 - x_0^3 + 2x_0^2 - x_0 + 1 = 0,$$

sau

$$x_0(x_0 + 1)(x_0^2 + 1) = 0; \quad (x_0 - 1)(x_0^2 + 1) = 0; \quad (x_0^2 + 1)(x_0^2 - x_0 + 1) = 0.$$

Deducem de aici $x_0^2 + 1 = 0$, deci ecuația admite două rădăcini, i și $-i$, independente de m și p .

În continuare vom observa din (29) că ecuația se mai scrie sub forma :

$$(x^2 + 1)[m(x^2 + x) + p(x - 1) + (x^3 - x + 1)] = 0.$$

Rezultă că celelalte două rădăcini ale ecuației din enunț sînt în același timp și rădăcinile ecuației :

$$(m+1)x^2 + (m+p-1)x + (1-p) = 0. \quad (29')$$

Facem observația că pentru $m = -1$ și $p \neq 2$ ecuația propusă admite rădăcinile i și $-i$ independente de p și rădăcina ecuației (29'), care în acest caz este de gradul unu. Dacă $m = -1$ și $p = 2$ se obțin numai rădăcinile i și $-i$.

2) Să se rezolve ecuația $x^3 - x^2 + (a+1)x + b = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$, știind că admite rădăcinile:

$$x_1 = \cos u; x_2 = \cos 2u; x_3 = -\cos 3u,$$

unde $0 < u < \frac{\pi}{2}$. Să se determine parametrii a și b .

Deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, deducem $\cos u + \cos 2u - \cos 3u = 1$

Putem scrie:

$$\cos u + \cos 2u - \cos 3u = 1 \Leftrightarrow (\cos u - \cos 3u) - (1 - \cos 2u) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2u \sin u - 2 \sin^2 u = 0 \Leftrightarrow \sin u (\sin 2u - \sin u) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin u \sin \frac{u}{2} \cos \frac{3u}{2} = 0.$$

Deoarece $\sin u = 0$ și $\sin \frac{u}{2} = 0$ implică fiecare $u \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă cu necesitate $\cos \frac{3u}{2} = 0$, deci $u = \frac{\pi}{3}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Datorită condiției $0 < u < \frac{\pi}{2}$, deducem $k = 0$ și $u = \frac{\pi}{3}$. Se obțin rădăcinile ecuației:

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = 1.$$

În fine, utilizând relația $x_1 x_2 x_3 = -b$, obținem $b = \frac{1}{4}$ și înlocuind $x = 1$, $b = \frac{1}{4}$ în ecuația din enunț avem $a + 1 + \frac{1}{4} = 0$, deci $a = -\frac{5}{4}$.

3) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\log_2 \frac{6x+22}{5} - 1}{1 - \log_2 \frac{8-x}{5}} = 2.$$

Datorită enunțului deducem:

$$6x + 22 > 0; 8 - x > 0; \frac{8-x}{5} \neq 2,$$

de unde rezultă $x \in \left(-\frac{11}{3}; -2\right) \cup (-2; 8)$. În aceste condiții putem scrie:

$$\frac{\log_2 \frac{6x+22}{5} - 1}{1 - \log_2 \frac{8-x}{5}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2 (6x+22) - \log_2 10}{\log_2 10 - \log_2 (8-x)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (6x+22)(x-8)^2 = \log_2 10^3 \Leftrightarrow (3x+11)(x-8)^2 = 500 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^3 - 37x^2 + 16x + 204 = 0. \quad (30)$$

Fie $f(x) = 3x^3 - 37x^2 + 16x + 204$. Încercînd să aflăm rădăcinile întregi ale ecuației $f(x) = 0$ (dacă acestea există), în afara condițiilor problemei, găsim:

$$f(1) \neq 0; f(-1) \neq 0; f(2) \neq 0; f(-2) = 0.$$

Deci ecuația (30) admite rădăcina întreagă $x_1 = -2$. Deducem în plus:

$$f(x) = (x+2)(3x^2 - 43x + 102),$$

de unde rezultă și rădăcinile $x_2 = 3$; $x_3 = \frac{34}{3}$.

Avînd în vedere condițiile de rezolvare rezultă că ecuația din enunț are o singură soluție $x_2 = 3$.

4) Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + m; g(x) = x^3 - 4x^2 - mx + 4, m \in \mathbb{R}.$$

a) Să se determine valorile parametrului m astfel încît ecuația $f(x) = 0$ să admită rădăcini multiple.

b) Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuațiile $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ admit rădăcini comune.

Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Deoarece rădăcinile multiple ale ecuației $f(x) = 0$ sînt și rădăcini ale ecuației $f'(x) = 0$, rezultă că poate fi rădăcină multiplă oricare dintre numerele $1; -\frac{1}{3}$.

Avem:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 - 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1;$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{27}.$$

Deci pentru $m = 1$ ecuația admite rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ (Se găsește imediat și $x_3 = -1$), iar pentru $m = -\frac{5}{27}$ ecuația admite rădăcinile $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$ (se obține $x_3 = \frac{5}{3}$). Astfel am rezolvat primul punct al problemei.

Pentru a rezolva cel de al doilea punct al problemei vom determina soluțiile $(m; x)$ ale sistemului:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + m &= 0, \\ x^3 - 4x^2 - mx + 4 &\neq 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Prin eliminarea lui m între cele două ecuații ale sistemului obținem ecuația bipătrată $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ale cărei soluții sînt $-2; -1; 1; 2$.

Din prima ecuație a sistemului (31) deducem $m = x + x^2 - x^3$ și înlocuind pe rînd valorile obținute pentru x , putem scrie soluțiile sistemului:

$$(10; -2); (1; -1); (1; 1); (-2; 2)$$

Rezultă:

- pentru $m = -2$ ecuațiile au o singură rădăcină comună $x_1 = 2$;
- pentru $m = 1$ ecuațiile au două rădăcini comune $x_1 = -1$;
- $x_2 = 1$;
- pentru $m = 10$ ecuațiile au o singură rădăcină comună $x_1 = -2$.

5) Fie m și n numere reale diferite astfel încît $mn > 0$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - (m+n)x^2 - (m^2 + mn + n^2)x + (m+n)(m^2 + n^2).$$

Să se calculeze $f(-m-n)$, $f(m+n)$ și să se demonstreze că ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale.

Deducem:

$$\begin{aligned} f(-m-n) &= -(m+n)^3 - (m+n)^3 + (m^2 + mn + n^2)(m+n) + \\ &+ (m+n)(m^2 + n^2) = (m+n)(-2m^2 - 4mn - 2n^2 + 2m^2 + mn + \\ &+ 2n^2) = -3mn(m+n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(m+n) &= (m+n)^3 - (m+n)^3 - (m^2 + mn + n^2)(m+n) + \\ &+ (m+n)(m^2 + n^2) = -mn(m+n). \end{aligned}$$

Deoarece $mn > 0$, rezultă $m+n \neq 0$, deci $f(-m-n) \neq 0$ și $f(m+n) \neq 0$. Prin urmare va trebui să analizăm separat cazurile $m+n > 0$ și $m+n < 0$.

Presupunând $m + n > 0$ deducem :

$$-(m + n) < 0 < m + n$$

și

$$f(-m - n) = -3mn(m + n) < 0 ; f(0) = (m + n)(m^2 + n^2) > 0 ;$$

$$f(m + n) = -mn(m + n) < 0,$$

deci ecuația $f(x) = 0$ admite rădăcinile reale x_1, x_2 astfel încît $-(m + n) < x_1 < 0 < x_2 < m + n$, de unde deducem că și cea de a treia rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ este număr real. Dacă presupunem $m + n < 0$, deducem $m + n < 0 < -(m + n)$ și raționamentul este analog.

6) Dacă ecuația $x^3 + px + q = 0$; $p, q \in \mathbb{R}$, are o singură rădăcină reală, modulul unei rădăcini imaginare este mai mare sau mai mic decât modulul rădăcinii reale, după cum $p > 0$, respectiv $p < 0$. (A. G. Ioachimescu — G.M. 8/1908).

Fie $x_1 = a$ rădăcina reală a ecuației. Rezultă :

$$x^3 + px + q = (x - a)(x^2 + ax + a^2 + p).$$

Presupunând $p \neq 0$, rezultă că rădăcinile complexe ale ecuației sînt :

$$x_2 = \frac{1}{2}(-a - i\sqrt{3a^2 + 4p}); x_3 = \frac{1}{2}(-a + i\sqrt{3a^2 + 4p}).$$

Deducem de aici :

$$|x_2| = |x_3| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2 + 4p}{4}} = \sqrt{a^2 + p}.$$

Deci :

$$p > 0 \Rightarrow |x_2| = |x_3| > |a|;$$

$$p < 0 \Rightarrow |x_2| = |x_3| < |a|.$$

Facem observația că pentru rezolvarea problemei s-a presupus $3a^2 + 4p > 0$.

7) Fie ecuația cu coeficienți reali $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Dacă $p \neq 0$ și $q^2 - 4pr < 0$, rădăcinile reale ale ecuației au același semn, opus semnului lui p .

Pentru rezolvare vom observa că putem scrie :

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 + p\left[\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr - q^2}{4p^2}\right].$$

Dacă x_0 este o rădăcină reală a ecuației din enunț se verifică inegalitatea :

$$\left(x_0 + \frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr - q^2}{4p^2} > 0$$

și deoarece

$$x_0^3 + p \left[\left(x_0 + \frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr - q^2}{4p^2} \right] = 0,$$

rezultă că x_0^3 și p au semne contrarii, deci x_0 și p au semne contrarii.

8) a) Fie polinomul $p \in \mathbb{C}[X]$, diferit de polinomul zero. Dacă există numărul complex $c \neq 0$ astfel încât $p(x) = p(x + c)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{C}$, gradul polinomului p este egal cu zero.

b) Dacă $p \in \mathbb{C}[X]$ este diferit de polinomul zero, iar a și b sînt numere complexe, $b \neq 0$, să se rezolve ecuația $p(x) = 0$ știind că :

$$(x - a)[p(x) - p(x - b)] = 3bp(x), \quad \forall x [x \in \mathbb{C}].$$

Pentru a răspunde la prima întrebare să observăm că dacă $\text{grad } p = 0$, avem $p(x) = p(x + c)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{C}$.

Dacă $\text{grad } p > 0$, fie x_1 o rădăcină a polinomului p , deci $p(x_1) = 0$. Cum $p(x_1) = p(x_1 + c)$, deducem că $x_1 + c$ este de asemenea o rădăcină a polinomului p . Reluînd raționamentul, cum $x_2 = x_1 + c$ este o rădăcină a polinomului p , deducem că $x_2 + c = x_1 + 2c$ este rădăcină a polinomului p . Presupunînd acum că $x_1 + hc$, $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 1$, este o rădăcină a polinomului p , datorită ipotezei avem :

$$0 = p(x_1 + hc) = p(x_1 + (h + 1)c),$$

deci și $x_1 + (h + 1)c$ este o rădăcină a polinomului p .

Rezultă că oricare ar fi rădăcina x_1 a polinomului p , sînt rădăcini ale polinomului p și numerele complexe :

$$x_1 + c; x_1 + 2c; \dots; x_1 + nc; \dots,$$

evident imposibil, deoarece numărul rădăcinilor unui polinom nu poate depăși gradul polinomului (care este finit). Deci presupunerea $\text{grad } p > 0$ este falsă. Rezultă că singurele polinoame nenule, care verifică relația din enunț, sînt polinoamele de gradul zero.

Pentru rezolvarea celui de al doilea punct al problemei vom scrie relația din enunț sub forma :

$$(x - a - 3b)p(x) = (x - a)p(x - b) \quad \forall x [x \in \mathbb{C}]. \quad (32)$$

Înlocuind $x = a$, deducem $-3bp(a) = 0$, deci există polinomul $p_1 \in \mathbb{C}[X]$ astfel încît $p = (X - a)p_1$. Înlocuind în (32), deducem:

$$(x - a - 3b)(x - a)p_1(x) = (x - a)(x - a - b)p_1(x - b), \quad \forall x [x \in \mathbb{C}],$$

sau

$$(x - a - 3b)p_1(x) = (x - a - b)p_1(x - b), \quad \forall x [x \in \mathbb{C}]. \quad (32')$$

Punind $x = a + b$ în (32') rezultă $-2bp_1(a + b) = 0$, deci există polinomul $p_2 \in \mathbb{C}[X]$ astfel încît $p_1 = (X - a - b)p_2$. Înlocuind în (32') rezultă:

$$(x - a - 3b)(x - a - b)p_2(x) = (x - a - b)(x - a - 2b)p_2(x - b), \\ \forall x [x \in \mathbb{C}].$$

deci

$$(x - a - 3b)p_2(x) = (x - a - 2b)p_2(x - b), \quad \forall x [x \in \mathbb{C}]. \quad (32'')$$

În fine, înlocuind $x = a + 2b$ în (32'') obținem $-bp_2(a + 2b) = 0$, de unde deducem existența polinomului $p_3 \in \mathbb{C}[X]$ astfel încît $p_2 = (X - a - 2b)p_3$. Înlocuind în (32'') putem scrie:

$$(x - a - 3b)(x - a - 2b)p_3(x) = (x - a - 2b)(x - a - 3b)p_3(x - b), \\ \forall x [x \in \mathbb{C}],$$

sau

$$p_3(x) = p_3(x - b), \quad \forall x [x \in \mathbb{C}].$$

Avînd în vedere primul punct al problemei rezultă $p_3 = k \in \mathbb{C}^*$. Putem acum scrie:

$$p = (X - a)p_1 = (X - a)(X - a - b)p_2 = (X - a)(X - a - b)(X - a - 2b)k,$$

de unde rezultă că rădăcinile ecuației $p(x) = 0$ sînt $x_1 = a$, $x_2 = a + b$, $x_3 = a + 2b$. (Facem observația că în cazul particular $a = 3$; $b = -1$ punctul b) al problemei a fost propus la concursul pentru admiterea în învățămîntul superior din iulie 1981.)

9) Fie polinomul $p \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Dacă p admite cel puțin o rădăcină întreagă și m, n sînt două numere întregi, $n > 1$, cel puțin unul dintre numerele:

$$p(m); p(m + 1); \dots; p(m + n - 1), \quad (33)$$

este divizibil prin n .

b) Să se demonstreze că polinomul p nu admite rădăcini întregi în fiecare din ipotezele:

(i) $p(0)$ și $p(1)$ sînt numere impare;

(ii) nici unul dintre numerele $p(-4)$; $p(0)$; $p(4)$ nu este divizibil prin 3.

a) Dacă polinomul p admite o rădăcină $a \in \mathbb{Z}$, există $q \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $p = (X - a)q$. În acest caz succesiunea de numere (33) este:

$$(m - a)q(m); (m - a + 1)q(m + 1); \dots; (m - a + n - 1)q(m + n - 1). \quad (33')$$

Deoarece $m - a; m - a + 1; \dots; m - a + n - 1$ sînt n numere întregi consecutive, unul dintre acestea este divizibil prin n , deci cel puțin unul din numerele succesiunii (33') este divizibil prin n .

b) Presupunînd că polinomul p admite cel puțin o rădăcină întreagă a și considerînd $m = 0, n = 2$, rezultă că cel puțin unul dintre numerele $p(0)$ și $p(1)$ este divizibil prin 2, contrar ipotezei (i). Deci $p(a) \neq 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

În ipoteza (ii), presupunînd, de asemenea, că polinomul p admite o rădăcină întreagă a și considerînd $m = 0, n = 3$, deducem că unul din numerele $-a, 1 - a, 2 - a$ este divizibil prin 3. Pe de altă parte putem scrie:

$$p(-4) = (-4 - a)q(-4) = -6q(-4) + (2 - a)q(-4);$$

$$p(0) = -aq(0);$$

$$p(4) = (4 - a)q(4) = 3q(4) + (1 - a)q(4);$$

Deducem astfel că cel puțin unul dintre numerele $p(-4), p(0), p(4)$ este divizibil prin 3, contrar ipotezei. Rezultă și în acest caz $p(a) \neq 0$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

10) Să se determine numerele complexe p, q, r știind că:

$$G = \{x \mid x \in \mathbb{C}, x^3 + px^2 + qx + r = 0\},$$

este grup multiplicativ, abelian.

Vom începe rezolvarea problemei observînd că din enunț rezultă că grupul G poate avea: un singur element, două elemente, sau trei elemente, corespunzător situațiilor în care ecuația $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are o rădăcină triplă, o rădăcină dublă și una simplă, respectiv trei rădăcini simple.

Fie $x_1 = 1$ elementul unitate al grupului. Dacă $x_2 x_3 = x_1$, deci $x_3 = 1$ (nu putem avea $x_2 = 0$, deoarece nu există x_2^{-1}), putem avea: $x_2^2 = x_3$, deci $x_2 = 1$; sau $x_2^2 = 1$, deci $x_2 \in \{-1; 1\}$. Deci avem sau $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ sau $x_1 = x_3 = 1, x_2 = -1$, cărora le corespund:

$$G = \{1\}, \text{ respectiv } G = \{1; -1\}.$$

În primul caz $p = -3, q = 3, r = -1$, în al doilea caz $p = q = -1, r = 1$. Evident răspunsul este același dacă presupunem $x_2 x_3 = x_1$.



În fine putem avea și $x_2x_3 = 1$. Rezultă $x_1x_2x_3 = 1$, deci $r = -1$. Înlocuind $x = 1$ în ecuație deducem $p + q = 0$, de unde $q = -p$. Ecuația se scrie în acest caz

$$(x - 1)[x^2 + (p + 1)x + 1] = 0.$$

Dacă $x_2^2 = 1$ rezultă $x_2 \in \{-1; 1\}$ și înlocuind în ecuația $x^2 + (p + 1)x + 1 = 0$, obținem $p = -3$, respectiv $p = 1$. Deducem în primul caz $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, rezultat semnalat anterior, iar în al doilea caz $x_1 = 1, x_2 = x_3 = -1$, deci $G = \{-1; 1\}$ și $p = 1, q = -1; r = -1$.

Dacă $x_2^2 = x_3$, cum $x_2x_3 = 1$, eliminând x_3 între cele două relații obținem $x_2^3 = 1$. Excluzând cazul $x_2 = 1$ (studiat anterior) deducem $x_2^2 + x_2 + 1 = 0$. Din $x_2^2 + x_2 + 1 = 0$ și $x_2^2 = x_3$ rezultă $x_2 + x_3 = -1$ deci $p + 1 = 1$, de unde $p = 0$. În acest caz ecuația din enunț este $x^3 - 1 = 0$ (deci $p = q = 0, r = -1$) și

$$G = \{1; \varepsilon; \bar{\varepsilon}\},$$

fiind una din rădăcinile cubice complexe ale unității.

§ 5. ECUAȚII IRAȚIONALE

În prezentarea acestui capitol trebuie să subliniem cadrul destul de restrâns în care, problema rezolvării ecuațiilor iraționale este abordată în liceu. În limitele acestui cadru vom prezenta situațiile în care ecuațiile conțin radicali de ordinul 2, radicali de ordinul 3 și mai mare decât 3.

Pentru ecuațiile iraționale care conțin numai radicali de ordinul doi există și tendințe de tipizare a rezolvărilor, ca spre exemplu:

1°. se stabilesc condițiile de existență a radicalilor;

2°. se fac treceri convenabile, dintr-o parte în alta a ecuației pentru ridicarea la pătrat;

3°. se stabilesc condițiile în care se ridică la pătrat;

4°. se află rădăcinile ecuației rezolvente;

5°. se află rădăcinile ecuației iraționale propuse.

Pentru exemplificare să considerăm ecuația;

$$\sqrt{6 + x - x^2} = 4 - x, x \in \mathbb{R}.$$

Condițiile de existență a radicalului sînt:

$$6 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 3].$$

În plus pentru $4 - x \leq 0$, deci pentru $x \geq 4$, ecuația nu este verificată. Deoarece :

$$[-2; 3] \cap (-\infty; 4) = [-2; 3],$$

rezultă că pentru $x \in [-2; 3]$, putem scrie :

$$\sqrt{6+x-x^2} = 4-x \Leftrightarrow 6+x-x^2 = 16-8x+x^2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2; \frac{5}{2}\right\}.$$

Din

$$[-2; 3] \cap \left\{2; \frac{5}{2}\right\} = \left\{2; \frac{5}{2}\right\},$$

deducem soluțiile ecuației: $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{5}{2}$.

Pentru economisirea timpului de lucru, propunem eliminarea anumitor etape. Fie spre exemplu ecuația :

$$\sqrt{x+15} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6-2x}, x \in \mathbb{R}.$$

În condițiile de existență a radicalilor, putem scrie :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+15} + \sqrt{x+3} &= \sqrt{6-2x} \Leftrightarrow (\sqrt{x+15} + \sqrt{x+3})^2 = \\ &= (\sqrt{6-2x})^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+15)(x+3)} = 6-2x \Rightarrow (x+15)(x+3) = \\ &= (6-2x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 1\}. \end{aligned}$$

Deoarece din rezolvare deducem :

$$\sqrt{x+15} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6-2x} \Rightarrow x \in \{-3; 1\},$$

rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației iraționale propuse este inclusă în mulțimea $\{-3; 1\}$. Verificând găsim soluția $x = -3$.

Adoptarea acestui mod de lucru nu exclude însă ca în anumite cazuri să se scrie explicit, de la început, condițiile de existență a radicalilor. Considerînd spre exemplu ecuația :

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x-x^2} = 2x^2 - x - 1,$$

încercările de eliminare a radicalilor conduc la o ecuație rezolventă de grad mai mare decît 4. Datorită condițiilor de existență a radicalilor, putem scrie :

$$\left. \begin{aligned} x-1 &\geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ 2-x-x^2 &\geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 1] \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \in \{1\}.$$

Deci ecuația propusă poate admite soluția 1, sau nu admite soluții. Verificând găsim soluția 1.

O altă problemă asupra căreia dorim să insistăm este în legătură cu gradul rezolventei ecuației iraționale propuse. În mod obligatoriu, va trebui ca, în operațiile de izolare a rădăcinilor și de ridicare la pătrat în ambele părți ale ecuației, să alegem căile cele mai simple.

Spre exemplu, propunând spre rezolvare ecuația

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+4} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{5-x} = 0, x \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

va exista cu certitudine intenția să se opteze pentru următorul mod de lucru :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+2} &= \sqrt{x+4} + \sqrt{5-x} \Leftrightarrow 4x+5 + \\ &+ 2\sqrt{(x+3)(3x+2)} = 9 + 2\sqrt{(x+4)(5-x)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)(5-x)} - \sqrt{(x+3)(3x+2)} = 2x-2. \end{aligned}$$

În această etapă vom constata că situația se complică suficient de mult, motiv pentru care trebuie să găsim o nouă cale de rezolvare. Un studiu atent al radicalilor din prima parte a ecuației conduce la descoperirea următorului mod de lucru :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+4} &= \sqrt{5-x} - \sqrt{3x+2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x+7 - 2\sqrt{(x+3)(x+4)} &= 2x+7 - 2\sqrt{(5-x)(3x+2)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+4)} &= \sqrt{(5-x)(3x+2)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}. \end{aligned}$$

Verificând găsim soluția 1.

Tot în legătură cu ecuația rezolventă trebuie să evidențiem următoarele :

— În funcție de modul de lucru ales, o ecuație irațională poate conduce la ecuații rezolvente diferite, dar mulțimea soluțiilor fiecărei ecuații rezolvente include mulțimea soluțiilor ecuației iraționale ce se rezolvă.

— Mai multe ecuații iraționale pot conduce la aceeași ecuație rezolventă. Pentru a exemplifica, să asociem ecuației (34) următoarele ecuații :

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+4} - \sqrt{3x+2} + \sqrt{5-x} = 0, x \in \mathbb{R} \quad (34')$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} - \sqrt{3x+2} - \sqrt{5-x} = 0, x \in \mathbb{R}. \quad (34'')$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} - \sqrt{3x+2} + \sqrt{5-x} = 0, x \in \mathbb{R}. \quad (34''')$$

Procedind pentru fiecare din aceste ecuații, în același mod ca și în cazul ecuației (34) sistem conduși la ecuația rezolventă $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Deducem :

- ecuația (34') are soluția $\frac{1}{2}$;
- ecuația (34'') are soluțiile $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$;
- ecuația (34''') nu are soluții.

Deosebit de important pentru activitatea individuală este să nu fim tentați a lucra după anumite șabloane (probleme tipizate), ceea ce ar aduce prejudicii serioase pregătirii la matematică. În rezolvarea unei probleme este bine ca, și atunci când întrevădem (sau cunoaștem) un mod de rezolvare, să alegem un mod de lucru care să aibă în vedere și particularitățile enunțului, care de cele mai multe ori au ca efect reducerea volumului de muncă. Prezintă în continuare câteva exemple pe care le găsim edificatoare în acest sens.

Exemple : 1) Să se rezolve ecuația :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = 2x^2 + 4x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

Observând că putem scrie :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = 2(x^2 + 2x + 4) - 6,$$

notind $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = u > 0$, sistem conduși la ecuația $2u^2 - u - 6 = 0$, de unde deducem $u = 2$. Se obțin imediat soluțiile ecuației propuse $x_1 = -2$; $x_2 = 0$.

2) Ecuația :

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{9x^2 - 12x + 4} = x^2 - 5x + 5, x \in \mathbb{R}$$

este echivalentă cu :

$$|2x - 3| + |3x - 2| = x^2 - 5x + 5, x \in \mathbb{R}.$$

3) Să se rezolve ecuația :

$$\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 3, x \in \mathbb{R}.$$

Notind $\sqrt{x^2 + x + 4} = A$, $\sqrt{x^2 + x + 1} = B$, obținem $A + B = 3$ și $A^2 - B^2 = 3$. Rezultă $A - B = 1$. Se deduce imediat $A = 2$, deci $x^2 + x = 0$. Soluțiile ecuației sînt $x_1 = -1$; $x_2 = 0$.

4) Să se rezolve ecuația :

$$\sqrt{x^2 - 8x + 7} + \sqrt[4]{x^2 - 8x + 7} = 6.$$

Notind $\sqrt[4]{x^2 - 8x + 7} = u \geq 0$, ecuația devine $u^2 + u - 6 = 0$, de unde rezultă $u = 2$. Deci $x^2 - 8x - 9 = 0$ și soluțiile ecuației propuse sînt $x_1 = -1$; $x_2 = 9$.

În încheiere prezentăm exemple de ecuații iraționale ce conțin radicali de ordin mai mare decît doi, cu scopul evidențierii unor procedee de rezolvare.

Exemple : 1) Să se rezolve ecuația :

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{x-2}, x \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Se reamintește că radicalul de indice impar dintr-un număr real este definit oricare ar fi acest număr.

În plus dacă $a, b \in \mathbb{R}$, putem scrie :

$$a = b \Leftrightarrow a^{2k+1} = b^{2k+1}, k \in \mathbb{Z}.$$

Rezultă de aici că ridicînd la puterea a treia în ambele părți ale ecuației, ecuația obținută este echivalentă cu ecuația inițială. Prin urmare soluțiile ecuației rezolvante sînt și soluțiile ecuației propuse.

Deci ecuația (35) este echivalentă cu ecuația

$$(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{2x-3})^3 = (\sqrt[3]{x-2})^3. \quad (35')$$

În fine dacă $E = A + B$, deducem $(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B) = A^3 + B^3 + 3ABE$. Deci ecuația (35') se scrie :

$$x - 2 + 3\sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{2x-3} \cdot \sqrt[3]{x-2} = x - 2,$$

sau

$$(1-x)(2x-3)(x-2) = 0.$$

Soluțiile ecuației (35) sînt deci $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 2$.

2) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încît :

$$\sqrt[4]{x+18} - \sqrt[4]{x+2} = 2.$$

Notînd $\sqrt[4]{x+18} = a \geq 0$ și $\sqrt[4]{x+2} = b \geq 0$, deducem $a - b = 2$ și $a^4 - b^4 = 16$. Eliminînd a , între aceste două ecuații, rezultă $b(b^3 + 3b + 4) = 0$, deci $b = 0$. Rezultă că ecuația propusă are soluția unică -2 .

3) Să se rezolve ecuația :

$$\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{x-12} = 7, x \in \mathbb{R}.$$

Pentru rezolvare putem nota $\sqrt{1-x} = a \geq 0$, $\sqrt[3]{x-12} = b$.
Procedînd ca în exemplul anterior, se obține sistemul :

$$a - b = 7 ; a^2 + b^3 = 11 = 0$$

Eliminînd a , deducem ecuația $b^3 + b^2 + 14b + 60 = 0$, cu singura soluție reală $b_1 = -3$, deci $x = -15$, soluție care verifică ecuația irațională propusă, deoarece $a = b + 7 = 4 > 0$.

§ 6. SISTEME DE DOUĂ ECUAȚII ALGEBRICE CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Prin exemplele pe care le prezentăm, intenționăm să asigurăm o saecintă parcurgere a principalelor probleme de rezolvare a sistemelor de două ecuații cu două necunoscute. Evident prezentarea nu se pretinde a fi exhaustivă dată fiind, în primul rînd, existența unor limite în cadrul cărora rezolvarea sistemelor poate fi efectuată.

§.1. SISTEME DE DOUĂ ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÎI CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Facem observația că rezolvarea sistemelor din cele două exemple pe care le prezentăm va fi efectuată cu ajutorul regulii lui Cramer, dar poate fi înlocuită cu o rezolvare prin metode elementare (substituție sau reducere).

Exemple : 1) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} (2m+1)x + (1-3m)y = m+2, \\ (m-4)x + (m+16)y = 2(m+2), \end{cases} \quad m \in \mathbb{C}.$$

Utilizînd notațiile cunoscute, putem scrie :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m+1 & 1-3m \\ m-4 & m+16 \end{vmatrix} = (2m+1)(m+16) + (m-4)(3m-1) = 5(m+2)^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m+2 & 1-3m \\ 2(m+2) & m+16 \end{vmatrix} = (m+2)(m+16-2+6m) = 7(m+2)^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2m+1 & m+2 \\ m-4 & 2(m+2) \end{vmatrix} = (m+2)(4m+2-m+4) = 3(m+2)^2.$$

Deci pentru $m = -2$ sistemul este compatibil nedeterminat avînd soluțiile $\left(t; \frac{3}{7}t\right)$, t fiind arbitrar în \mathbb{C} . (Se știe că în cazurile în care sistemul este nedeterminat, cele două ecuații ale sistemului au aceleași soluții, care sînt și soluțiile sistemului. Înlocuind $m = -2$ în oricare din ecuațiile sistemului, soluțiile ecuației obținute sînt soluțiile sistemului.)

Dacă $m \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sistemul este compatibil determinat, avînd soluția $\left(\frac{7}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

2) Fie sistemul :

$$\begin{cases} (2 - 3m)x + (2m - 1)y = 12m + 1, \\ (4 - 5m)x + (3m - 2)y = 17m + 2, \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}, (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

1°. Să se rezolve. Discuție.

2°. Dacă $m \neq 0$, $m \neq 1$:

- a) să se arate că $x \neq 2$ și să se stabilească $a \in \mathbb{R}$ astfel încît $y \neq a$;
- b) să se găsească o relație independentă de m între x și y ;
- c) să se demonstreze inegalitatea :

$$\frac{y^2 - x^2}{7^2} \geq \frac{1}{4};$$

d) să se determine $m \in \mathbb{Z}$ știind că x și y sînt cifra zecilor și respectiv cifra unităților unui număr de două cifre, care se cere ;

e) să se rezolve ecuația :

$$\frac{x + y - 19}{m + 4} = 1.$$

1°. Aplicînd regula lui Cramer, deducem :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3m & 2m - 1 \\ 4 - 5m & 3m - 2 \end{vmatrix} = -(3m - 2)^2 + (2m - 1)(5m - 4) = m(m - 1);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12m + 1 & 2m - 1 \\ 17m + 2 & 3m - 2 \end{vmatrix} = (12m + 1)(3m - 2) - (17m + 2)(2m - 1) = 2m(m - 4);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 - 3m & 12m + 1 \\ 4 - 5m & 17m + 2 \end{vmatrix} = (2 - 3m)(17m + 2) + (5m - 4)(12m + 1) = 3m(3m - 5).$$

Rezultă :

— pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ sistemul este compatibil determinat, cu soluția :

$$\left(\frac{2(m-4)}{m-1}; \frac{3(3m-5)}{m-1} \right);$$

— pentru $m = 0$ sistemul este compatibil nedeterminat, avind soluțiile :

$$(l; 2l - 1), l \in \mathbb{R};$$

— pentru $m = 1$ sistemul este incompatibil.

2a) Dacă $x = 2$, deducem $\frac{2(m-4)}{m-1} = 2$, sau $2m - 8 = 2m - 2$, evident imposibil. Punînd acum $y = a$, putem scrie succesiv :

$$y = a \Leftrightarrow \frac{3m-5}{m-1} = a \Leftrightarrow m(a-9) = a-15,$$

egalitate care are sens numai pentru $a \neq 9$. Rezultă $y \neq 9$.

2b) În general pentru a stabili relația între x și y , independentă de parametrul m , se elimină m între cele două ecuații ale sistemului. Obținem același rezultat dacă observăm că ecuațiile :

$$x = \frac{2(m-4)}{m-1}; y = \frac{3(3m-5)}{m-1},$$

se mai pot scrie :

$$x = 2 - \frac{6}{m-1}; y = 9 - \frac{6}{m-1}, \quad (36)$$

de unde se deduce imediat $y - x = 7$, adică relația cerută în enunț.

2c) Utilizînd (36) și relația $y - x = 7$, putem scrie :

$$\frac{y^2 - x^2}{7^2} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{(y-x)(x^2 + xy + y^2)}{7^2} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x-y)^2 + 3xy \geq \frac{7^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3xy \geq \frac{3 \cdot 7^2}{4} \Leftrightarrow \frac{6(m-4)(3m-5)}{(m-1)^2} \geq -\frac{49}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24[(m-1)-3][3(m-1)-2] \geq -49(m-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24[3(m-1)^2 - 11(m-1) + 6] \geq -49(m-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 121(m-1)^2 - 24 \cdot 11 \cdot (m-1) + 144 \geq 0 \Leftrightarrow [11(m-1) - 12]^2 \geq 0,$$

ceea ce demonstrează inegalitatea din enunț.

2d) Deoarece soluția sistemului se poate scrie și sub forma (36), în condițiile $m, x, y \in \mathbb{Z}$, deducem $m - 1 \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$. Datorită relațiilor $y = 9 - \frac{6}{m-1}$ și $y \leq 9$ rezultă $m - 1 > 0$. În fine, deoarece $x = 2 - \frac{6}{m-1} > 0$ rezultă și $m - 1 > 3$. Deci $m - 1 = 6$, de unde $m = 7$. Rezultă $x = 1$, $y = 8$, și numărul cerut este 18.

2e) Putem scrie :

$$\begin{aligned} \frac{x + y - 19}{m + 4} = 1 &\Leftrightarrow \frac{2(m - 4) + 3(3m - 5) - 19(m - 1)}{(m - 1)(m + 4)} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-8m - 4}{(m - 1)(m + 4)} = 1 \Leftrightarrow m(m + 11) = 0. \end{aligned}$$

Având în vedere condițiile enunțului, soluția ecuației este $m = -11$.

6.2. ELIMINAREA UNEI NECUNOSCUTE ÎNTRE DOUĂ ECUAȚII ALGEBRICE DE GRADUL DOI, CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Fie sistemul :

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0, \end{cases} \quad (37)$$

coeficienții ecuațiilor fiind numere complexe.

Dacă cel puțin unul dintre numerele a_1, a_2, c_1, c_2 este nul, rezolvarea sistemului este simțitor ușurată. Spre exemplu, presupunând $a_1 = 0$, din prima ecuație se scoate x , care se substituie în ecuația a doua, obținându-se ecuația rezolventă în y , a sistemului, ecuație de grad cel mult patru.

Fie acum $a_1a_2c_1c_2 \neq 0$. Înmulțind parte cu parte prima ecuație cu c_2 , și a doua ecuație cu $-c_1$, prin adunarea ecuațiilor obținute, rezultă o ecuație de forma :

$$Lx^2 + Mxy + Nx + Py + R = 0,$$

sau

$$(Mx + P)y = -(Lx^2 + Nx + R). \quad (37')$$

Excluzînd cazurile banale $M = 0, P \neq 0$ și $M = P = 0$, în care rezolvarea este imediată, mai deosebim cazurile :

$$1^\circ MX + P \mid LX^2 + NX + R$$

$$2^\circ MX + P \text{ nu divide } LX^2 + NX + R.$$

În cazul 1°, putem scrie $LX^2 + NX + R = (MX + P)(SX + T)$, deci ecuația (37') devine:

$$(Mx + P)(y - Sx - T) = 0,$$

rezolvarea sistemului (37) reducându-se la rezolvarea a două sisteme, alcătuite din una din ecuațiile acestuia împreună cu ecuația $Mx + P = 0$ respectiv $y - Sx - T = 0$.

În cazul 2°, din (37'), rezultă:

$$y = -\frac{Lx^2 + Nx + R}{Mx + P}.$$

Substituind de aici, y în oricare din ecuațiile sistemului (37), deducem rezolventa în x a acestuia, care este o ecuație de grad cel mult patru.

Corespunzător cazurilor 1° și respectiv 2°, prezentăm în continuare două exemple numerice.

Exemple : 1)

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y - 2 = 0, \\ 4x^2 + xy - y^2 + 2x - 2y - 4 = 0; \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2.$$

Înmulțind prima ecuație, parte cu parte, cu -1 și adunând cu cea de a doua ecuație a sistemului, deducem:

$$x^2 - xy + x + y - 2 = 0,$$

deci

$$(x - 1)y = x^2 + x - 2.$$

Deoarece $x - 1 \mid x^2 + x - 2$, scriem ultima ecuație sub forma:

$$(x - 1)(y - x - 2) = 0,$$

de unde deducem $x - 1 = 0$ sau $y - x - 2 = 0$.

Sîntem astfel conduși la rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y - 2 = 0; \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} y - x - 2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y - 2 = 0. \end{cases} \quad (38')$$

Soluțiile $(1; 1)$, $(1; -2)$ ale sistemului (38) se obțin imediat.

Pentru rezolvarea sistemului (38') vom substitui $y = x + 2$, din prima ecuație, în ecuația a doua. Obținem ecuația $2x^2 - x - 6 = 0$

ale cărei soluții sînt 2 și $-\frac{3}{2}$. Se obțin de aici soluțiile $(2; 4)$, $(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ ale sistemului (38').

Deci soluțiile sistemului din enunț sînt :

$$(1; 1); (1; -2); (2; 4); (-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$$

2)

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 - 4x - 5y + 3 = 0, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 - 2x + 2y - 11 = 0, \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2.$$

Înmulțind, parte cu parte, prima ecuație cu -1 și adunînd ecuațiile obținute, rezultă $4xy - 9y^2 - 10x - 17y + 20 = 0$, de unde putem scrie :

$$x = \frac{9y^2 + 17y - 20}{4y - 10}. \quad (39)$$

Substituind în prima ecuație a sistemului (și efectuînd calculele) deducem :

$$17y^4 + 44y^3 + 3y^2 - 44y - 20 = 0,$$

ecuație ale cărei rădăcini sînt $y_1 = 1; y_2 = -1; y_3 = -2, y_4 = -\frac{10}{17}$.

Înlocuind succesiv valorile obținute pentru y în (39), rezultă :

$$x_1 = -1; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = \frac{37}{17}.$$

Rezultă că soluțiile sistemului sînt : $(-1; 1); (2; -1); (1; -2); (\frac{37}{17}; -\frac{10}{17})$.

6.3. OBSERVAȚII ASUPRA SISTEMELOR SIMETRICE

Numim sistem simetric de m ecuații cu n necunoscute x, y, \dots, w , un sistem de forma :

$$\begin{cases} f_1(x; y; \dots; w) = 0, \\ f_2(x; y; \dots; w) = 0, \\ \vdots \\ f_m(x; y; \dots; w) = 0, \end{cases} \quad (40)$$

dacă f_1, f_2, \dots, f_m sînt funcții simetrice de x, y, \dots, w , definite pe E^n , cu valori în \mathbb{C} , unde $E \subseteq \mathbb{C}$.

Datorită proprietăților funcțiilor simetrice, rezultă că $(x_0, y_0, \dots, w_0) \in E^n$ fiind o soluție a sistemului (40); este, de asemenea, soluție orice permutare a acesteia.

Proprietatea unui sistem, de a admite ca soluție orice permutare a uneia dintre soluțiile sale, nu este caracteristică numai sistemelor simetrice.

Spre exemplu sistemul :

$$\begin{cases} 5x^2 - 9x + 6y - 8 = 0, \\ 5y^2 + 6x - 9y - 8 = 0, \end{cases}$$

admite soluțiile $(1; 2), (2; 1); (-1; -1), \left(\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$, fără a fi sistem simetric în sensul definiției anterioare.

Pentru a sublinia unele probleme privind rezolvarea sistemelor simetrice apelăm la exemple numerice.

Exemple : 1) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -48; \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2.$$

Dacă z_1 și z_2 sînt rădăcinile ecuației $z^2 - Sz + P = 0$ se știe că $z_1 + z_2 = S$ și $z_1 z_2 = P$. Punind $S = 2$; $P = -48$, rezultă că soluțiile sistemului sînt $(z_1; z_2)$ și $(z_2; z_1)$.

Rezolvînd ecuația $z^2 - 2z - 48 = 0$ obținem $z_1 = -6$; $z_2 = 8$, deci sistemul din enunț are soluțiile $(-6; 8)$ și $(8; -6)$.

2) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x - y = 25, \\ xy = -150; \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2.$$

Observînd că putem scrie :

$$x + (-y) = 25; \quad x(-y) = 150,$$

datorită celor indicate în exemplul anterior, găsirea soluțiilor sistemului propus implică rezolvarea ecuației :

$$z^2 - 25z + 150 = 0.$$

Deoarece obținem $z_1 = 10$; $z_2 = 15$, rezultă că avem :

$$(x = 10; -y = 15) \text{ sau } (x = 15; -y = 10).$$

Soluțiile sistemului propus sînt deci :

$$(x_1 = 10; y_1 = -15); (x_2 = 15; y_2 = -10)$$

3) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 11, \\ 2x^2 + xy + 2y^2 = 8, \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2$$

Pentru rezolvare, observăm că sistemul se mai poate scrie și sub forma :

$$(x + y)^2 - 5xy = 11; \quad 2(x + y)^2 - 3xy = 8$$

Notînd $x + y = a$, $xy = b$, obținem :

$$a^2 - 5b = 11; \quad 2a^2 - 3b = 8;$$

de unde rezultă imediat $a^2 = 1$ și $b = -2$. Avînd în vedere notațiile făcute, sîntem conduși la rezolvarea sistemelor :

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -2 \end{cases}$$

ale căror soluții sînt $(2; -1)$, $(-1; 2)$ și respectiv $(-2; 1)$, $(1; -2)$.

Deci soluțiile sistemului inițial sînt :

$$(2; -1); (-1; 2); (-2; 1); (1; -2)$$

Observație. Rezolvarea unui sistem simetric, de două ecuații cu două necunoscute, este — în general — ușurată (din punct de vedere al calculelor) dacă se iau ca necunoscute auxiliare suma și produsul necunoscutelor.

Pentru a veni în sprijinul acestei observații, sugerate de exemplul 3, prezentăm încă și exemplul următor.

4) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x^2y + xy^2 = 6, \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2.$$

Deoarece sistemul se mai scrie și sub forma :

$$\begin{cases} (x + y)^2 - xy = 7, \\ xy(x + y) = 6, \end{cases}$$

notînd $x + y = s$; $xy = p$, rezultă :

$$s^2 - p = 7; \quad sp = 6$$

Eliminând p între cele două ecuații obținem ecuația $s^3 - 7s - 6 = 0$, ale cărei rădăcini sînt: $s_1 = -1$; $s_2 = -2$; $s_3 = 3$. Datorită ecuației $p = s^2 - 7$, deducem $p_1 = -6$; $p_2 = -3$; $p_3 = 2$. Revenind la notațiile făcute obținem sistemele:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases}$$

ale căror soluții se obțin imediat dacă avem în vedere exemplul 1. Deducem în final soluțiile sistemului din enunț:

$$(-3; 2); (2; -3); (-3; 1); (1; -3); (1; 2); (2; 1).$$

5) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ |x + y| + |x - y| = 4, \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

Deoarece $x^2 - y^2 = 3 > 0$, rezultă $|x^2 - y^2| = 3$, sau $|x - y| \cdot |x + y| = 3$. Deci sistemul din enunț este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} |x + y| + |x - y| = 4, \\ |x + y| \cdot |x - y| = 3, \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad (41)$$

cu condiția suplimentară ca numerele $x + y$ și $x - y$ să aibă același semn.

Sistemul (41) conduce la:

$$\begin{cases} |x + y| = 1, \\ |x - y| = 3, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} |x + y| = 3, \\ |x - y| = 1. \end{cases}$$

În primul caz avem:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 3, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x + y = -1, \\ x - y = -3, \end{cases}$$

de unde deducem soluțiile $(2; -1)$ și $(-2; 1)$.

În cel de al doilea caz avem:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1, \end{cases}$$

deci obținem și soluțiile $(2; 1)$ și $(-2; -1)$.

Răspuns: $(2; -1); (-2; 1); (2; 1); (-2; -1)$.

6.4. OBSERVAȚII ASUPRA SISTEMELOR DE DOUĂ ECUAȚII OMOGENE DE GRADUL DOI CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Să considerăm ecuația de gradul doi cu coeficienți complecși :

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d.$$

Deoarece oricare ar fi $(x; y) \in \mathbb{C}^2$ avem $ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 = d \Leftrightarrow a(-x_0)^2 + b(-x_0)(-y_0) + c(-y_0)^2 = d$, rezultă că $(x_0; y_0) \in \mathbb{C}^2$ fiind soluție a ecuației, este, de asemenea, soluție și $(-x_0; -y_0)$.

Fie acum sistemul :

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2, \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2. \quad (42)$$

Datorită observației anterioare rezultă că sistemul (42) are sau două soluții :

$$(x_0; y_0); (-x_0; -y_0),$$

sau patru soluții :

$$(x_0; y_0); (-x_0; -y_0); (x'_0; y'_0); (-x'_0; -y'_0).$$

Deci rezolventa în x este sau $x^2 - x_0^2 = 0$ sau $x^4 - (x_0^2 + x'^2_0)x^2 + x^2_0x'^2_0 = 0$, ceea ce confirmă că sistemul (42) poate fi întotdeauna rezolvat cu ajutorul cunoștințelor de matematică din liceu. (Evident aceleași observații se pot face și în legătură cu rezolventa în y .)

În continuare prezentăm o serie de exemple dintre care primele trei expun cele mai utilizate procedee de rezolvare a sistemelor de două ecuații omogene de gradul doi, cu două necunoscute.

Exemple : 1) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 3x^2 - 3xy - y^2 = 5, \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 15, \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2.$$

Aplicăm modul de lucru propus la 6.2. Pentru aceasta, înmulțind ambele părți ale primei ecuații cu 5 și adunând, parte cu parte, cu a doua ecuație a sistemului, obținem ecuația $16x^2 - 12xy = 40$. Observind că avem $x \neq 0$, putem scrie în continuare :

$$y = \frac{4x^2 - 10}{3x}. \quad (42')$$

Substituind în prima ecuație a sistemului (rezultatul este același dacă se substituie în a doua ecuație) rezultă :

$$3x^2 - (4x^2 - 10) - \left(\frac{4x^2 - 10}{3x}\right)^2 = 5,$$

de unde deducem :

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

deci

$$x_1 = -2; x_2 = -1; x_3 = 1; x_4 = 2.$$

Înlocuind, pe rînd, valorile obținute pentru x , în (42'), găsim valorile corespunzătoare pentru y :

$$y_1 = -1, y_2 = 2; y_3 = -2; y_4 = 1.$$

Soluțiile sistemului sînt : $(-2; -1); (-1; 2); (1; -2); (2; 1)$.

2) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11, \\ 9x^2 - 2xy + y^2 = 33, \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{C}^2. \quad (43)$$

Înlocuim $y = tx$ în fiecare din ecuațiile sistemului. Rezultă :

$$\begin{cases} x^2(1 - t - t^2) = -11, \\ x^2(9 - 2t + t^2) = 33. \end{cases}$$

Observînd că din sistemul (43) rezultă $x \neq 0$ (înlocuind $x = 0$ în ambele ecuații ale sistemului obținem contradicție), deducem :

$$\frac{1 - t - t^2}{9 - 2t + t^2} = -\frac{1}{3},$$

de unde rezultă $2t^2 + 5t - 12 = 0$, ecuație ale cărei rădăcini sînt $t_1 = -4; t_2 = \frac{3}{2}$. Avem deci sau $y = -4x$, sau $y = \frac{3}{2}x$, și ca atare vom rezolva sistemele :

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11, \\ y = -4x \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11, \\ y = \frac{3}{2}x. \end{cases}$$

Se obțin pentru sistemul din enunț soluțiile :

$$(-1; 4); (1; -4); (2; 3); (-2; -3).$$

3) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 2x^2 + 6xy - 3y^2 = -7, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Adunând cele două ecuații, parte cu parte, rezultă ecuația $3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0$, de unde deducem sau $x = \frac{1}{3}y$ sau $x = -2y$. În continuare rezolvăm sistemele :

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ 3x = y \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x = -2y. \end{cases}$$

Răspuns :

$$(1; 3); (-1; -3); (2; -1); (-2; 1).$$

Recomandăm ca în rezolvarea sistemelor de două ecuații omogene de gradul doi, cu două necunoscute să nu se treacă imediat la aplicarea unuia din procedeele prezentate în exemplele 1, 2, 3, deoarece anumite particularități ale problemei pot ușura munca de obținere a soluției. Încercăm să întărim recomandarea făcută prin exemplele 4 și 5.

4) $3x^2 + xy + 10y^2 = 12; x^2 - 2xy + y^2 = 4.$

Datorită ecuației a doua, sîntem conduși la rezolvarea sistemelor :

$$\begin{cases} 3x^2 + xy + 10y^2 = 12, \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} 3x^2 + xy + 10y^2 = 12, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

5) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + xy + ay^2 = a + 2; \\ bx^2 - xy + 2y^2 = 3(b + 2); \quad a, b \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

știind că admite soluția $(-1; 2)$.

Înlocuind în ambele ecuații $x = -1; y = 2$, se obține $a = 1, b = 2$
Sistemul se scrie :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3; \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 12 \end{cases}$$

și — fiind simetric și omogen — mai deducem soluțiile :

$$(2; -1), (1; -2), (-2; 1).$$

Deoarece numărul maxim de soluții ale sistemului este patru, rezolvarea este încheiată.

CAPITOLUL V

INEGALITĂȚI

§ 1. GENERALITĂȚI

Fie a și b două numere reale. Prin definiție numărul a se zice *strict mai mic* decât numărul b , dacă există numărul strict pozitiv p astfel încât $a + p = b$. Scriem în acest caz $a < b$. Relația „ $<$ ” se zice relație de *inegalitate strictă* pe \mathbb{R} .

De asemenea, se definește *relația de inegalitate (nestrictă)* „ \leq ” pe \mathbb{R} prin $a \leq b$, dacă $a < b$ sau $a = b$. În plus dacă $b < a$ scriem și $a > b$ („ a este strict mai mare decât b ”).

Dacă a, b, c, \dots sînt numere reale, enumerăm următoarele *proprietăți* :

$$1^\circ. a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

$$2^\circ. \left. \begin{matrix} a < b \\ k > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ak < bk \quad \text{și} \quad \left. \begin{matrix} a < b \\ k < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ak > bk.$$

$$3^\circ. \left. \begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c < b + d.$$

$$4^\circ. \left. \begin{matrix} 0 \leq a < b \\ 0 \leq c < d \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac < bd.$$

5°. *Relația de inegalitate nestrictă pe \mathbb{R} este :*

- reflexivă ($a \leq a$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$),
- antisimetrică ($a \leq b$ și $b \leq a$ implică $a = b$),
- tranzitivă ($a \leq b$ și $b \leq c$ implică $a \leq c$).

6°. Dacă $a > 0$, $b > 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci :

$$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n; \quad a < b \Leftrightarrow a^{-n} > b^{-n}.$$

$$7^\circ. |ab| \geq ab;$$

$$8^\circ. |a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$9^\circ. |a - b| \geq |a| - |b|.$$

În continuare dăm demonstrațiile acestora.

1°. Prin ipoteză există $p > 0$ astfel încât $a + p = b$, deci $(a + c) + p = (b + c)$, de unde deducem $a + c < b + c$.

2°. Avem $a + p = b$, deci $ak + pk = bk$. Dacă $k > 0$, atunci $pk > 0$ și rezultă $ak > bk$. Dacă $k < 0$, putem scrie $ak = bk + (-pk)$ și cum $-pk > 0$, rezultă $ak > bk$.

3°. Din ipoteză rezultă că există $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ astfel încît $a + p_1 = b$, $c + p_2 = d$, deci $(a + c) + (p_1 + p_2) = b + d$, și cum $p_1 + p_2 > 0$ rezultă $a + c < b + d$.

4°. Putem scrie $a + p_1 = b$, $c + p_2 = d$ deci $(a + p_1)(c + p_2) = bd$, sau $ac + (ap_2 + cp_1 + p_1p_2) = bd$. Deoarece $ap_2 + cp_1 + p_1p_2 > 0$, deducem $ac < bd$.

5°. Reflexivitatea rezultă imediat din definiția relației de inegalitate (nestrictă).

Să presupunem acum că avem $a \leq b$ și $b \leq a$, deci există numerele $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ astfel încît $a + p_1 = b$ și $b + p_2 = a$. Deducem $(a + b) + (p_1 + p_2) = a + b$, de unde $p_1 + p_2 = 0$ și cum $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, rezultă $p_1 = p_2 = 0$, deci $a = b$ și proprietatea de antisimetrie a relației de ordine (nestrictă) este dovedită.

Pentru a demonstra și proprietatea de tranzitivitate, să observăm că, din $a \leq b$ și $b \leq c$, deducem existența numerelor $p \geq 0$, $q \geq 0$, astfel încît $a + p = b$ și $b + q = c$; de unde rezultă $a + (p + q) = c$, deci $a < c$.

6°. Deoarece $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, suma din ultima paranteză fiind pozitivă datorită condițiilor ipotezei, deducem $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$.

În plus putem scrie, pentru $a > 0$, $b > 0$:

$$a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \left(\frac{1}{b}\right)^n \Leftrightarrow a^{-n} > b^{-n}.$$

7°. Se deduce imediat deoarece $|x| \geq x$ oricare ar fi x real.

8°. Putem scrie:

$$\begin{aligned} (|a + b|)^2 &= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2 = \\ &= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2, \end{aligned}$$

de unde, prin aplicarea proprietății 6°, deducem $|a + b| \leq |a| + |b|$. Facem în plus observația că proprietățile 7° și 8° pot fi generalizate. Astfel dacă a_1, a_2, \dots, a_n sînt numere reale, se verifică inegalitățile:

$$|a_1 a_2 \dots a_n| \geq a_1 a_2 \dots a_n$$

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

(Prima inegalitate este evidentă, datorită observației făcute la cazul $n = 2$. A doua inegalitate se obține — spre exemplu — prin inducție.)

9°. Observind că putem scrie $a = (a - b) + b$, deducem $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$, de unde rezultă $|a - b| \geq |a| - |b|$.

§ 2. INEGALITĂȚI UZUALE

În practica rezolvării problemelor, din manuale și din culegerile de probleme care se adresează elevilor, cele referitoare la inegalități apelează în majoritatea cazurilor la unele *inegalități cunoscute*, pe care le numim aici inegalități uzuale. Prezentăm în continuare unele dintre acestea :

1°. Dacă $a > 0$ atunci $a + \frac{1}{a} \geq 2$ și dacă $a < 0$ se verifică $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

În ipoteza $a > 0$ putem scrie $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$.

Asemănător se demonstrează și cea de a doua inegalitate.

2°. Oricare ar fi numerele reale a, b, c , putem scrie :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0,$$

cu egal dacă și numai dacă numerele a, b, c sînt egale.

Demonstrația este imediată dacă observăm că putem scrie :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

3°. Lungimile laturilor unui triunghi fiind a, b, c , se verifică inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca < 0.$$

În condițiile enunțului putem scrie :

$$|b - c| < a; |c - a| < b, |a - b| < c,$$

deci

$$b^2 - 2bc + c^2 < a^2; c^2 - 2ac + a^2 < b^2, \\ a^2 - 2ab + b^2 < c^2.$$

Rezultă $2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) < a^2 + b^2 + c^2$, de unde deducem inegalitatea din enunț.

4°. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, există inegalitatea :

$$|ax + by + cz| \leq 1,$$

cu egal dacă și numai dacă numerele a, b, c sînt direct proporționale cu numerele x, y, z .

Pentru demonstrație utilizăm identitatea lui Lagrange :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = \\ = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2,$$

de unde, în condițiile enunțului, putem scrie :

$$(ax + by + cz)^2 \leq 1,$$

care este inegalitatea din enunț.

5° Inegalitățile dintre mediile aritmetică (m_a), geometrică (m_g) și armonică (m_h) a n numere reale strict pozitive, pentru cazurile $n = 2, 3, 4$:

$$m_h \leq m_g \leq m_a, \quad (1)$$

cu egal dacă și numai dacă numerele considerate sînt egale.

Pentru $n = 2$ inegalitățile (1) se scriu :

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

și demonstrația este imediată.

Fie numerele reale strict pozitive x, y, z . Putem scrie :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Deoarece $x + y + z > 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$, deducem :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0. \quad (2)$$

Dacă a, b, c sînt numere reale strict pozitive, să notăm $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$. Din (2) deducem :

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geq 0,$$

adică $m_a \geq m_g$ pentru $n = 3$. Se observă din $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \rightarrow x = y = z$, că obținem $m_a = m_g$ dacă și numai dacă $a = b = c$.

Inegalitatea $m_h \leq m_g$, pentru $n = 3$, este :

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

ceea ce reprezintă inegalitatea $m_g \leq m_a$ pentru numerele $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

Să considerăm acum numerele reale strict pozitive a, b, c, d . Putem scrie :

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}},$$

deci

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd},$$

adică inegalitatea $m_a \geq m_g$, pentru $n = 4$.

Pentru a demonstra inegalitatea $m_h \leq m_g$, în cazul $n = 4$, facem aceeași observație ca și în cazul $n = 3$.

§ 3. INEGALITĂȚI REMARCABILE

Vom prezenta aici unele inegalități a căror importanță rezultă din numeroasele posibilități de utilizare în practica matematică, și care socotim necesar a face parte din cultura matematică a elevului din ultimile clase de liceu sau a celui care este membru al unui cerc de matematică.

1°. Inegalitatea mediilor. Fie x_1, x_2, \dots, x_n numere reale strict pozitive. Notațiile fiind cele din paragraful precedent, se verifică inegalitățile :

$$\min_{1 \leq i \leq n} x_i \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq \max_{1 \leq i \leq n} x_i \quad (3)$$

cu egal dacă și numai dacă numerele sînt egale.

Pentru demonstrație, să arătăm întîi că oricum am alege $n \geq 2$ numere reale strict pozitive a căror sumă este numărul S , fixat, produsul acestora este maxim dacă numerele sînt egale.

În adevăr să presupunem că $P_{max} = x_1^0 \cdot x_2^0 \cdot \dots \cdot x_n^0$, cu $x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0 = S$, dar fără ca toate numerele $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ să fie egale între ele. Nu particularizăm demonstrația dacă considerăm $x_1^0 \neq x_2^0$. În acest caz, fie :

$$P' = \frac{x_1^0 + x_2^0}{2} \cdot \frac{x_1^0 + x_2^0}{2} \cdot x_3^0 x_4^0 \dots x_n^0.$$

Deoarece $x_1^0 \neq x_2^0$ avem și $\left(\frac{x_1^0 + x_2^0}{2}\right)^2 > x_1^0 x_2^0$, deci $P' > P_{max}$, imposibil. Afirmația făcută este deci demonstrată.

Rezultă de aici că oricare ar fi numerele reale strict pozitive x_1, x_2, \dots, x_n , notînd $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, se verifică inegalitatea

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n,$$

cu egal dacă și numai dacă numerele sînt egale.
Inegalitatea obținută se mai scrie:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

ceea ce demonstrează a treia inegalitate (3).

Pentru a doua inegalitate (3) se va observa că aceasta este echivalentă cu inegalitatea dintre mediile geometrică și aritmetică a numerelor: $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$.

Prima și ultima inegalitate se deduc imediat din

$$\min_{1 \leq i \leq n} x_i \leq x_k \leq \max_{1 \leq i \leq n} x_i,$$

pentru orice $k = 1, 2, \dots, n$.

2°. Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1 + a)^n \geq 1 + na; \quad a \in (-1; +\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece pentru $n = 0$ și pentru $n = 1$ inegalitatea se verifică, vom presupune în continuare $n \geq 2$.

Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sînt numere reale strict pozitive, putem scrie:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) = 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \dots > 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Punînd acum $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, deducem $(1 + a)^n > 1 + na$ și inegalitatea este demonstrată pentru $a > 0, n \geq 2$.

Dacă $a = 0$, verificarea este imediată.

Fie $-1 < a < 0, n \geq 2$ și să considerăm inegalitatea evidentă:

$$(1 + a)^{n-1} + (1 + a)^{n-2} + \dots + (1 + a) + 1 < n,$$

deci

$$[(1 + a) - 1][(1 + a)^{n-1} + (1 + a)^{n-2} + \dots + (1 + a) + 1] > na,$$

de unde deducem $(1 + a)^n - 1 > na$, ceea ce demonstrează inegalitatea lui Bernoulli și în acest ultim caz.

3°. **Inegalitatea lui Jensen.** Considerăm necesare pentru început unele precizări :

— Dacă x_1, x_2 sînt două numere reale, $x_1 < x_2$, oricare ar fi numerele reale pozitive m și n , cu $m + n \neq 0$, se verifică inegalitățile :

$$x_1 \leq \frac{mx_1 + nx_2}{m+n} \leq x_2.$$

Demonstrația este imediată.

— Fie E un interval (finit sau infinit) al axei reale. Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ se zice convexă pe E dacă :

$$f\left(\frac{mx_1 + nx_2}{m+n}\right) \leq \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{m+n}. \quad (4)$$

oricare ar fi x_1, x_2 din E și oricare ar fi numerele reale pozitive m și n , $m + n \neq 0$.

Dacă se schimbă sensul inegalității în (4), se obține definiția funcției concave.

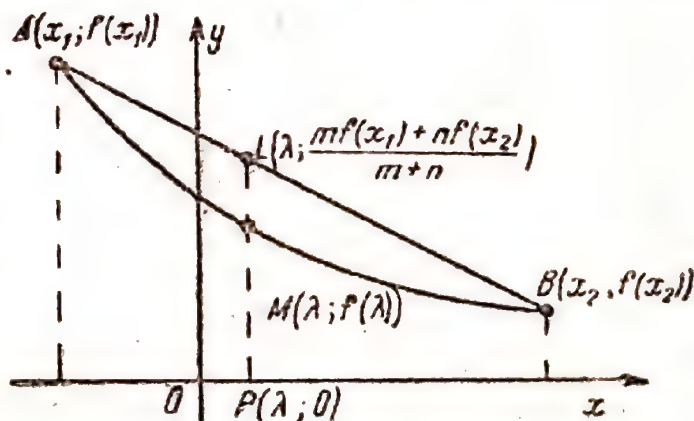
Să considerăm inegalitatea (4) și fie $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ două puncte ale graficului funcției f . Notăm π_1 , semiplanul determinat de dreapta AB în planul xy , a cărei intersecție cu semiaxa negativă a ordonatelor este o semidreaptă. Geometric, inegalitatea (4) afirmă că mulțimea punctelor graficului funcției f , cu $x \in [x_1; x_2]$ este inclusă în $\pi_1 \cup AB$ (vezi fig. nr. 2, unde s-a notat $\lambda = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}$).

Menționăm în plus că dacă $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, este de două ori derivabilă, o condiție necesară și suficientă pentru ca f să fie convexă (concavă) pe E , este $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$)

oricare ar fi $x \in E$. (Pentru demonstrație vezi, spre exemplu, „Curs de calcul diferențial și integral“, G. M. Fihtenholtz, Ed. Tehnică, 1963).

Cu acestea putem enunța **inegalitatea lui Jensen** :

„Fie E un interval și $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este convexă pe E atunci oricare ar fi $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$



g . nr. 2.



și oricare ar fi numerele pozitive p_1, p_2, \dots, p_n , nu toate nule, se verifică inegalitatea :

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}\right) \leq \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \quad (5)$$

Prezentăm o *demonstrație* prin inducție. Pentru $n = 1$ verificarea este imediată, iar pentru $n = 2$ se obține definiția funcției convexe.

Să presupunem acum că (5) se verifică pentru $k \geq 2$, oricare ar fi numerele x_1, x_2, \dots, x_k și p_1, p_2, \dots, p_k , îndeplinind condițiile enunțului și fie, în aceleași condiții, numerele $x'_1, x'_2, \dots, x'_{k+1}$ și $p'_1, p'_2, \dots, p'_{k+1}$. Notînd $p'_1 + p'_2 + \dots + p'_k = S$, putem scrie :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p'_1x_1 + p'_2x_2 + \dots + p'_{k+1}x_{k+1}}{p'_1 + p'_2 + \dots + p'_{k+1}}\right) &= f\left(\frac{S\left(\frac{p'_1}{S}x'_1 + \dots + \frac{p'_k}{S}x'_k\right) + p'_{k+1}x_{k+1}}{S + p'_{k+1}}\right) \leq \\ &\leq \frac{S \cdot f\left(\frac{p'_1}{S}x'_1 + \dots + \frac{p'_k}{S}x'_k\right) + p'_{k+1}f(x'_{k+1})}{S + p'_{k+1}} \leq \\ &\leq \frac{S\left(\frac{p'_1}{S}f(x'_1) + \dots + \frac{p'_k}{S}f(x'_k)\right) + p'_{k+1}f(x'_{k+1})}{S + p'_{k+1}} = \\ &= \frac{p'_1f(x'_1) + p'_2f(x'_2) + \dots + p'_{k+1}f(x'_{k+1})}{p'_1 + p'_2 + \dots + p'_{k+1}}, \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că (5) se verifică și pentru $k + 1$. Cu acestea, demonstrația inegalității lui Jensen este încheiată.

Menționăm că se verifică imediat că s-au atribuit argumentului funcției f valori din E . În plus facem observația că, dacă f este concavă pe E , se demonstrează relația analoagă cu (5), în care se schimbă sensul inegalității.

4°. Inegalitatea lui Hölder. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt numere reale pozitive, p și q numere mai mari decît 1 și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se verifică inegalitatea :

$$\sum x_i y_i \leq (\sum x_i^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum y_i^q)^{\frac{1}{q}},$$

sumele fiind extinse la toate valorile lui $i = 1, 2, \dots, n$.

Fie, pentru *demonstrație*, funcția $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, ($p \geq 1$).

Deducem imediat $f''(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in [0; +\infty)$, deci f este convexă.

Aplicînd inegalitatea lui Jensen, deducem :

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i u_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i u_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i},$$

unde $a_i > 0$ și $u_i \in [0; +\infty)$, pentru toate valorile lui $i = 1, 2, \dots, n$.
Înlocuind

$$a_i = y_i^{\frac{p}{p-1}} \text{ și } u_i = x_i y_i^{\frac{1}{1-p}},$$

putem scrie succesiv :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^{\frac{p}{p-1}}} \right)^p &\leq \frac{\sum x_i^p}{\sum y_i^{\frac{p}{p-1}}} \Leftrightarrow \sum x_i y_i \leq \frac{(\sum x_i^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum y_i^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum y_i^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum x_i y_i \leq (\sum x_i^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum y_i^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

sumele fiind extinse pentru toate valorile lui $i = 1, 2, \dots, n$. Observînd că ultima inegalitate este aceeași cu cea din enunț, demonstrația este terminată.

Facem observația că în cazul $p = 2$ inegalitatea lui Hölder se scrie

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right),$$

și sub această formă este cunoscută sub denumirea de inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz. (Vezi manual de algebră pentru clasa a X-a.)

5°. Inegalitatea lui Minkowski. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt numere reale pozitive și $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$, se verifică inegalitatea :

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicînd inegalitatea lui Hölder, putem scrie:

$$\begin{aligned}\Sigma(x_i + y_i)^p &= \Sigma(x_i + y_i)^{p-1}x_i + \Sigma(x_i + y_i)^{p-1}y_i \leq \\ &\leq \left[\Sigma(x_i + y_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} (\Sigma x_i^p)^{\frac{1}{p}} + \left[\Sigma(x_i + y_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot (\Sigma y_i^p)^{\frac{1}{p}} = \\ &= [\Sigma(x_i + y_i)^p]^{\frac{p-1}{p}} \left[(\Sigma x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\Sigma y_i^p)^{\frac{1}{p}} \right],\end{aligned}$$

sumele fiind extinse la toate valorile $i = 1, 2, \dots, n$. Se deduce de aici imediat inegalitatea din enunț.

§ 4. APLICAȚII

Ne propunem să prezentăm unele exemple de demonstrare a inegalităților:

- utilizînd proprietăți ale numerelor reale (Exemplele 1, 2, 3);
- ca aplicații ale inegalităților cunoscute (Exemplele 4, 5, 6, 7);
- utilizînd metoda inducției matematice (Exemplul 8);
- utilizînd proprietăți cunoscute ale funcțiilor elementare (Exemplele 9, 10);
- utilizînd procedee ale calculului diferențial (Exemplele 11, 12, 13);
- ca aplicații ale cunoștințelor de geometrie (Exemplele 14, 15).

Exemple: 1) Dacă a, b, c sînt numere reale a căror sumă este zero sau 1, să se demonstreze inegalitatea:

$$ab + bc + ca < \frac{3}{2}.$$

Oricare ar fi numărul real x , putem scrie $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, deci $x^2 - x + 1 > 0$. Înlocuind succesiv, x cu a, b, c , deducem:

$$a^2 + 1 > a, \quad b^2 + 1 > b, \quad c^2 + 1 > c,$$

de unde $a^2 + b^2 + c^2 + 3 > a + b + c$, sau

$$(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) + 3 > a + b + c.$$

Înlocuind în ultima inegalitate $a + b + c = 0$ sau $a + b + c = 1$, deducem inegalitatea din enunț.

2) Fie numerele reale $a > 0, b > 0$. Oricare ar fi numărul natural n , se verifică inegalitatea:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < a^n + b^n.$$

Pentru început să observăm că inegalitatea este evidentă dacă $n = 0$ sau $n = 1$. Presupunind $n \geq 2$, putem scrie:

$$a < \sqrt[n]{a^n + b^n}; \quad b < \sqrt[n]{a^n + b^n},$$

de unde deducem $a + b < 2\sqrt[n]{a^n + b^n}$, care conduce imediat la inegalitatea din enunț.

3) Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{3},$$

a, b, c fiind numere reale pozitive.

Oricare ar fi numerele reale pozitive x și y putem scrie $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = (x - y)^2(x + y) \geq 0$, deci $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$. Deducem de aici: $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$, $b^3 + c^3 \geq b^2c + bc^2$; $c^3 + a^3 \geq c^2a + ca^2$, de unde rezultă:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + ca^2.$$

Ultima inegalitate mai poate fi scrisă:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - (a^3 + b^3 + c^3),$$

sau

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

4) Oricare ar fi numărul natural $n > 1$, se verifică inegalitatea:

$$n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1).$$

Utilizând inegalitatea mediilor putem scrie:

$$\frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{n} > \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}.$$

Deoarece $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ (progresie aritmetică), deducem

$$n > \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)},$$

de unde rezultă imediat inegalitatea din enunț.

5) Fie a_1, a_2, \dots, a_n , numere pozitive și $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Să se arate că:

$$S \sum_{k=1}^n \frac{1}{S - a_k} \geq \frac{n^2}{n - 1}.$$

Pentru rezolvare vom transforma succesiv inegalitatea din enunț :

$$S \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{S - a_k} \geq \frac{n^2}{n-1} \Leftrightarrow \frac{(n-1)S}{n} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{S - a_k}}.$$

Dar $(n-1)S = nS - S = \sum_{k=1}^n (S - a_k)$, deci ultima inegalitate se scrie

$$\frac{\sum_{k=1}^n (S - a_k)}{n} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{S - a_k}},$$

care este inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică a numerelor pozitive $S - a_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

6) Notațiile fiind cele din geometria triunghiului, să se demonstreze inegalitatea :

$$6Rr \leq \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}.$$

Să observăm întâi că putem scrie :

$$abc = 4RS = 4Rpr = 2Rr(a + b + c).$$

Deci :

$$\frac{Rr(a + b + c)}{abc} = \frac{1}{2},$$

sau

$$\frac{Rr}{bc} + \frac{Rr}{ca} + \frac{Rr}{ab} = \frac{1}{2}.$$

Inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică a numerelor $\frac{Rr}{bc}$, $\frac{Rr}{ca}$, $\frac{Rr}{ab}$ și egalitatea precedentă conduc la :

$$\frac{R^3 r^3}{a^2 b^2 c^2} \leq \frac{1}{63}, \text{ de unde } 6Rr \leq \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}.$$

7) În orice triunghi se verifică inegalitatea :

$$\frac{r_a}{a} \cdot \frac{r_b}{b} \cdot \frac{r_c}{c} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3.$$

Inegalitatea din enunț se poate transforma succesiv

$$\frac{pS^3}{S^3} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} abc \Leftrightarrow \frac{p}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ultima inegalitate se deduce imediat, aplicând inegalitatea lui Jensen funcției concave $f: [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$, $f(x) = \sin x$:

$$\sin \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3}{3}$$

și înlocuind $x_1 = A$, $x_2 = B$, $x_3 = C$.

8) Dacă $x \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$ iar $p > q$ sînt două numere naturale strict pozitive, atunci:

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q}$$

(Culegere de probleme — V. A. Krecimar)

Pentru $x = 0$ inegalitatea se verifică. Presupunem $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ și facem inducție după p .

Dacă $p = q + 1$ (prin ipoteză $p > q$) inegalitatea devine:

$$\frac{x^{q+1} - 1}{q + 1} > \frac{x^q - 1}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{x^q} > (1 - x)q + 1.$$

Notînd $\frac{1}{x} = 1 + \alpha$, cu $1 + \alpha > 0$, $\alpha \neq 0$ (vezi ipoteza), ultima inegalitate se scrie $(1 + \alpha)^q > 1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha}$. În plus $\alpha > \frac{\alpha}{1 + \alpha}$ și, utilizînd inegalitatea lui Bernoulli, putem scrie:

$$(1 + \alpha)^q > 1 + q\alpha > 1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha} q,$$

ceea ce demonstrează inegalitatea din enunț pentru $p = q + 1$, adică

$$\frac{x^{q+1} - 1}{q + 1} > \frac{x^q - 1}{q}, \quad (6)$$

oricare ar fi numărul natural $q \geq 1$.

Să presupunem acum că:

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q} \quad (6')$$

unde $q \geq 1$ și $p \geq q + 1$. Datorită inegalității (6') avem și

$$\frac{x^{p+1} - 1}{p + 1} > \frac{x^p - 1}{p}. \quad (6'')$$

Din (6') și (6'') deducem :

$$\frac{x^{p+1} - 1}{p+1} > \frac{x^q - 1}{q},$$

ceea ce demonstrează inegalitatea (6') pentru $q \geq 1$ și $p+1 \geq q+2$.

Cu acestea demonstrația este încheiată.

9) Să se demonstreze inegalitățile :

$$\log_7 11 > \log_9 14 > \log_{11} 17.$$

Pentru demonstrație vom observa că putem scrie :

$$\log_7 \frac{11}{7} > \log_7 \frac{14}{9} \text{ și } \log_7 \frac{14}{9} > \log_9 \frac{14}{9},$$

ambele inegalități fiind consecințe ale proprietăților de monotonie a funcției logaritmice cu baza supraunitară. De aici deducem :

$$\log_7 \frac{11}{7} > \log_9 \frac{14}{9}, \text{ deci } \log_7 11 > \log_9 14,$$

prima inegalitate fiind astfel demonstrată. În mod analog se demonstrează și cea de a doua inegalitate.

10) Fie a și b două numere reale strict pozitive. Oricare ar fi $x \in [0; 1]$ se verifică inegalitățile :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2} \left[a \left(\frac{b}{a} \right)^x + b \left(\frac{a}{b} \right)^x \right] \leq \frac{a+b}{2}.$$

Să observăm că pentru $a = b$ inegalitățile se verifică. Fie deci $a \neq b$ și să considerăm funcția :

$$f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \left(\frac{b}{a} \right)^x + b \left(\frac{a}{b} \right)^x.$$

Datorită simetriei funcției f în raport cu parametrii a și b este suficient să studiem numai cazul $a > b$. Definim în plus funcțiile :

$$z: [0; 1] \rightarrow \left[1; \frac{a}{b} \right], z(x) = \left(\frac{a}{b} \right)^x,$$

$$g: \left[1; \frac{a}{b} \right] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2} \left(bx + \frac{a}{x} \right).$$

Funcția z este strict crescătoare și bijectivă. În plus $f = g \circ z$.

Putem scrie :

$$g(x_1) - g(x_2) = b \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \left(x_1 x_2 - \frac{a}{b} \right), \text{ unde } 1 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{a}{b}.$$

Deducem de aici :

$$1 \leq x_1 < x_2 \leq \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 < 0 \\ x_1 x_2 - \frac{a}{b} < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) > 0,$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 < 0 \\ x_1 x_2 - \frac{a}{b} > 0 \end{cases} \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) < 0.$$

Deci $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq z(x_1) < z(x_2) \leq \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow g(z(x_1)) - g(z(x_2)) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, ceea ce demonstrează că funcția f este strict descrescătoare pe $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

În mod analog se demonstrează că funcția este strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Deoarece $f(0) = f(1) = a + b$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{ab}$, deducem datorită monotoniei funcției f :

$$2\sqrt{ab} \leq f(x) \leq a + b, \quad \forall x, x \in [0; 1],$$

ceea ce demonstrează inegalitățile din enunț.

11) Dacă πV , πA și πS sînt respectiv volumul, aria totală și aria laterală ale unui con circular drept, se verifică inegalitățile :

$$a) A^3 \geq 72 V^2$$

$$b) 2S^3 \geq 27\sqrt{3} V^2.$$

Să se stabilească condițiile în care se verifică egalitatea.

Pentru a demonstra prima inegalitate să observăm că, din formulele care dau volumul și aria totală a conului, deducem :

$$h = \frac{3V}{R^2}; \quad g = \frac{A - R^2}{R},$$

unde h , g și R sînt lungimile înălțimii, generatoarei și razei bazei conului. Înlocuind în $g^2 = h^2 + R^2$, deducem :

$$2Ax^3 - A^2x + 9V^2 = 0, \quad (7)$$

unde s-a notat $R^2 = x$.

Ecuatia (7) are rădăcini reale (și în acest caz sînt numere strict pozitive) dacă și numai dacă discriminantul este pozitiv, deci $A^3 \geq 72V^2$. Din (7) deducem că avem $A^3 = 72V^2$, dacă și numai dacă $A = 4R^2$, ceea ce conduce la $g = 3R$.

Datorită formulelor care dau volumul și aria laterală, putem scrie:

$$h = \frac{3V}{R^2}; \quad g = \frac{S}{R}.$$

Înlocuind în relația $g^2 = h^2 + R^2$ și notînd $R^2 = x$, obținem ecuația:

$$x^3 - S^2x + 9V^2 = 0. \quad (8)$$

Pentru funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - S^2x + 9V^2$, putem întocmi următorul tabel:

| x | 0 | $\frac{S}{\sqrt{3}}$ | $+\infty$ |
|---------|--------|------------------------------------|-----------|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $9V^2$ | $f\left(\frac{S}{\sqrt{3}}\right)$ | $+\infty$ |

Rezultă că ecuația (8) are cel puțin o rădăcină reală $x > 0$, dacă și numai dacă se verifică inegalitatea $f\left(\frac{S}{\sqrt{3}}\right) \leq 0$, echivalentă cu cea de a doua inegalitate din enunț. Se deduce imediat că egalitatea are loc pentru $g = R\sqrt{3}$.

12) Oricare ar fi numerele reale strict pozitive a și b , $a \neq b$, se verifică inegalitățile:

$$2 < \frac{2}{a+b} \left(\frac{a^a}{b^b} \right)^{\frac{1}{a-b}} < e.$$

e fiind numărul lui Euler.

Să observăm că inegalitățile din enunț rămîn aceleași dacă schimbăm între ele numerele a și b . Deci orice demonstrație făcută pentru $0 < a < b$ își menține valabilitatea și pentru $0 < b < a$.

Presupunînd $0 < b < a$, prima inegalitate este echivalentă cu:

$$(a-b)\ln(a+b) - a\ln a + b\ln b < 0 \quad (9)$$

Considerînd funcția $g: [b; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = (x-b)\ln(x+b) - x\ln x + b\ln b,$$

putem scrie, pentru orice $x \in [b; +\infty)$:

$$g'(x) = \ln(x+b) - \ln x - \frac{2b}{x+b}; \quad g''(x) = \frac{b(x-b)}{x(x+b)^2}$$

În plus :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{x+b}{x} \right] = 0. \quad (9')$$

Deoarece $g''(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (b; +\infty)$, deducem că g' este strict crescătoare pe $[b; +\infty)$ și avînd în vedere (9') rezultă $g'(x) < 0$.

Deci funcția g este strict descrescătoare pe $[b; +\infty)$ și cum $g(b) = 0$, deducem $g(x) < 0$ oricare ar fi $x \in (b; +\infty)$, ceea ce demonstrează inegalitatea (9).

A doua inegalitate din enunț este echivalentă cu :

$$(a-b) \ln \frac{e(a+b)}{2} - a \ln a + b \ln b > 0. \quad (10)$$

Fie funcția $h : [b; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = (x-b) \ln \frac{e(x+b)}{2} - x \ln x + b \ln b,$$

continuă și de două ori derivabilă pe domeniul ei de definiție.

Putem scrie :

$$h'(x) = \ln \frac{e(x+b)}{2} + \frac{x-b}{x+b} - \ln x - 1; \quad h'(b) = 0;$$

$$h''(x) = \frac{b(x-b)}{x(x+b)^2}.$$

Rezultă $h''(x) > 0$, pentru orice $x \in (b; +\infty)$, ceea ce demonstrează că h' este strict crescătoare pe $[b; +\infty)$ și cum $h'(b) = 0$, rezultă $h'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in [b; +\infty)$. Deci funcția h este strict crescătoare pe $[b; +\infty)$ și, avînd în vedere $h(b) = 0$, deducem $h(x) > 0$, oricare ar fi $x > b$, ceea ce demonstrează inegalitatea (10).

13) Fie numerele reale $a < b < c$ și funcția $f : [a; c] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe $[a; c]$ și de două ori derivabilă pe $(a; c)$. Notăm :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

Dacă f este convexă (concavă) pe $[a; c]$ avem $\Delta \geq 0$ ($\Delta \leq 0$)

Pentru demonstrație să considerăm funcția $g : [a; c] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$g(x) = f(x) + Mx^2 + Nx + P$$

și să determinăm numerele reale M, N, P astfel încît $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. Sîntem conduși la sistemul compatibil determinat :

$$\begin{cases} Ma^2 + Na + P = -f(a), \\ Mb^2 + Nb + P = -f(b), \\ Mc^2 + Nc + P = -f(c), \end{cases}$$

de unde deducem :

$$M = - \left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} \right].$$

Deoarece $g(a) = g(b)$ și $g(b) = g(c)$, rezultă că există $x_1 \in (a; b)$ și $x_2 \in (b; c)$ astfel încît $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$, de unde deducem existența numărului $x_0 \in (x_1; x_2)$ cu proprietatea $g''(x_0) = 0$, deci $f''(x_0) + 2M = 0$, sau $2M = -f''(x_0)$. Dacă f este convexă pe $[a; c]$, avem $f''(x_0) \geq 0$, deci $M \leq 0$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $\Delta \geq 0$. Raționamentul este analog în cazul în care f este concavă pe $[a; c]$.

14) Oricare ar fi numărul real x , se verifică inegalitățile :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 6x + 10} + \sqrt{x^2 + 4} &\geq 3\sqrt{2}, \\ |\sqrt{x^2 - 6x + 10} - \sqrt{x^2 + 4}| &\leq \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Dacă avem în vedere că putem scrie $X = \sqrt{(x-3)^2 + 1}$ și $Y = \sqrt{x^2 + 2^2}$, rezultă că X poate fi interpretat ca fiind distanța dintre punctele $M(x; 0)$ și $A(3; -1)$ sau $A'(3; 1)$, iar Y distanța dintre același punct M și unul din punctele $B(0; 2)$ sau $B'(0; -2)$ (vezi fig. nr. 3).

Putem scrie : $d(M; A) + d(M; B) \geq d(A; B)$, cu egal dacă și numai dacă punctul M coincide cu punctul M_0 . Exprimînd distanțele, cu

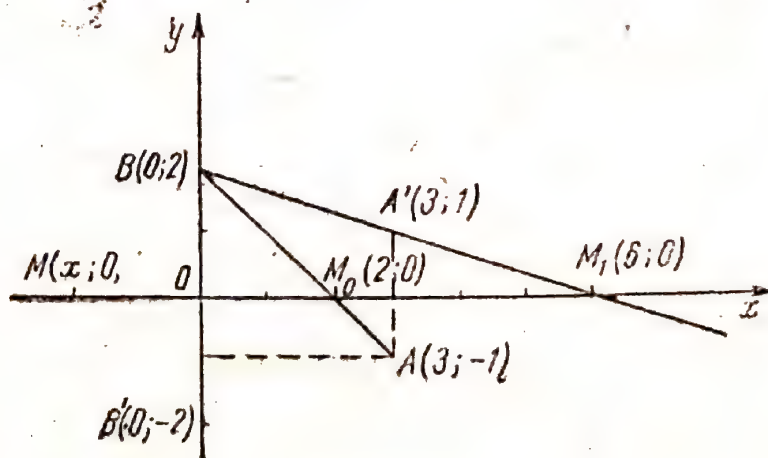


Fig. nr. 3

ajutorul coordonatelor punctelor considerate deducem inegalitatea $X + Y \geq 3\sqrt{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Egalitatea avînd loc pentru $M = M_0$, deducem pentru acest caz $x = 2$.

În fine, avînd în vedere punctele A' , B , M , deducem :

$$|d(M; A') - d(M; B)| \leq d(A'; B)$$

cu egal dacă și numai dacă punctul M coincide cu M_1 . Procedînd ca mai înainte, deducem inegalitatea $|X - Y| \leq \sqrt{10}$, egalitatea verificîndu-se numai pentru $x = 6$.

15) Oricare ar fi numerele a , b , c aparținînd intervalului $[0; 1]$, se verifică inegalitatea :

$$x + y + z < \frac{3}{2} + (xy + yz + zx).$$

Pentru demonstrație să luăm punctele M , N , P , Q respectiv pe laturile $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ ale pătratului $ABCD$ avînd latura de lungime egală cu unitatea (vezi fig. nr. 4). În plus segmentele $|AM|$ și $|CP|$ au aceeași lungime x , iar segmentele $|BN|$ și $|DQ|$ au aceeași lungime y . Scriînd că suma ariilor triunghiurilor AMQ , BNM , CPN , DQP , este mai mică decît aria pătratului, deducem inegalitatea :

$$x + y - 2xy < 1.$$

Să observăm că pentru $x = 1$, $y = 0$, sau $x = 0$, $y = 1$ se obține $x + y - 2xy = 1$. Deci putem scrie :

$$x + y \leq 1 + 2xy,$$

oricare ar fi numerele x , y din $[0; 1]$.

Considerînd acum numerele x , y , z din $[0; 1]$ rezultă :

$$x + y \leq 1 + 2xy; \quad y + z \leq 1 + 2yz,$$

$$z + x \leq 1 + 2zx, \quad (11)$$

de unde deducem :

$$x + y + z < \frac{3}{2} + (xy + yz + zx). \quad (11')$$

În inegalitatea (11') s-a exclus cazul de egalitate deoarece nu pot fi îndeplinite simultan condițiile de egalitate din (11).

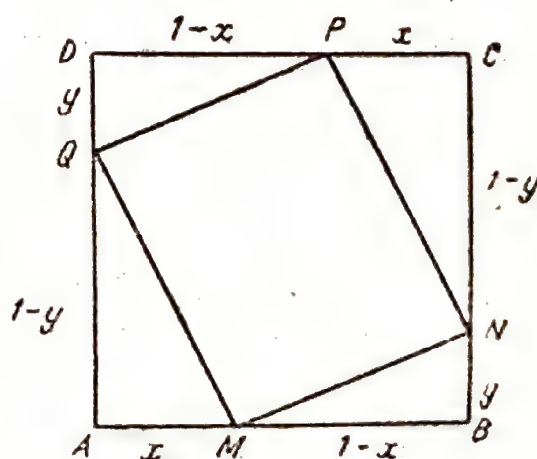


Fig. nr. 4

§ 5. INECUAȚII

În matematica din gimnaziu și liceu, inecuațiile au implicații vaste, motiv care impune ca elevii să-și însușească foarte bine tehnicile de rezolvare. Fondul de cunoștințe necesar pentru abordarea problemei trebuie să includă în mod obligatoriu :

- inegalități în mulțimea numerelor reale și proprietățile acestora ;
- proprietăți legate de monotonia și variația semnelor pentru funcțiile elementare.

Ne îngăduim să subliniem unele probleme referitoare la tehnica rezolvării inecuațiilor.

a) O primă problemă este cea legată de *studiul funcțiilor definite prin relații de forma :*

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

unde $p, q \in \mathbb{R}[X]$.

Socotim necesar ca în primele exemple, ce se lucrează să se studieze semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

evidențiindu-se concluzia :

- dacă n este par : $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \neq x_0$ și $f(x_0) = 0$;
- dacă n este impar : $f(x) < 0$, pentru $x < x_0$, $f(x) > 0$, pentru $x > x_0$ și $f(x_0) = 0$.

Fie acum funcția $F: E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

cu $p, q \in \mathbb{R}[X]$ și unde E este mulțimea numerelor reale mai puțin mulțimea rădăcinilor reale ale polinomului q .

Convenim ca orice rădăcină reală a polinomului p , sau q , să fie numită zero respectiv pol al funcției F . Pe baza concluziei enunțate mai înainte, rezultă :

„În jurul unui zero sau pol de ordin impar (par) funcția F prezintă (nu prezintă) variație de semn”.

Evident, această ultimă concluzie va fi întărită și printr-un exemplu prezentat în prealabil.

Ne exprimăm părerea că procedînd astfel, rezolvitorul realizează o economie de timp și în plus, eliminarea tabelelor de variație a semnului, cu mai multe linii, oferă mai puține posibilități de a greși.

Pentru a indica modul de lucru propus să rezolvăm inecuația :

$$F(x) = \frac{(x+3)(x^2 + 2x - 3)}{(2-x)(x^2 - 2x + 2)} \geq 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Deducem zerourile $x_1 = x_2 = -3$, $x_3 = 1$, polul $x_4 = 2$ și într-o primă etapă alcătuim următorul tabel :

| | | | | | |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -3 | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $F(x)$ | | 0 | 0 | $+$ | $-$ |

Am afirmat $F(x) < 0$, pentru $x > 2$, observînd că pentru valori foarte mari ale lui x obținem $F(x) < 0$.

În continuare tabelul se completează, marcînd variația de semn „în jurul” numerelor 2 și 1 menținînd același semn „în jurul” zeroului de ordin par -3 .

| | | | | | |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -3 | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $F(x)$ | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

În fine putem scrie $F(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 2)$.

b) O a doua problemă este legată de rezolvarea inecuațiilor în care intervin funcții iraționale, logaritmice, exponențiale etc. Pentru o mai bună ilustrare a celor ce dorim să recomandăm, prezentăm următoarele.

Exemple : 1) Să se determine mulțimea tuturor numerelor reale x astfel încît :

$$\frac{3 + \sqrt{4 - 2x}}{x + 2} > \frac{5}{2}.$$

Deducem pentru început $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2] = E$. Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3 + \sqrt{4 - 2x}}{x + 2} - \frac{5}{2}$. Putem scrie :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4 - 2x} = 5x + 4 \Rightarrow x(25x + 48) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{48}{25}; 0 \right\}.$$

Se obține $x = 0$, soluție pentru ecuația $f(x) = 0$. Putem întocmi următorul tabel de variație a semnului funcției f

| | | | | |
|--------|-----------|------|-----|-----|
| x | $-\infty$ | -2 | 0 | 2 |
| $f(x)$ | $-$ | $+$ | 0 | $-$ |

Semnul funcției f , pentru fiecare din intervalele $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2]$ a fost stabilit înlocuind, pe rînd, x cu cîte unul din numerele din aceste intervale.

Deci mulțimea numerelor $x \in \mathbb{R}$, pentru care se verifică inecuația din enunț este $(-2; 0)$.

2) Să se rezolve inecuația :

$$(1 - 2^{x+1})(x^2 - 1) < 0, x \in \mathbb{R}.$$

Observînd că avem $(1 - 2^{x+1})(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$, putem alcătui următorul tabel :

| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
|--------------------------|-----------|------|-----|-----------|
| $(1 - 2^{x+1})(x^2 - 1)$ | + | 0 | 0 | - |

Răspunsul este deci $x \in (1; +\infty)$.

În concluzie, dacă E este o reuniune de intervale ale axei reale, fie funcția continuă $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și una din inecuațiile $f(x) < 0$ sau $f(x) > 0$. Pentru rezolvarea inecuației propunem următorul mod de lucru :

- se rezolvă ecuația $f(x) = 0$;
- se stabilește semnul funcției $f(x)$ pe fiecare din subintervalele mulțimii E pe care $f(x) \neq 0$;
- se trag concluziile corespunzătoare pentru rezolvarea inecuației.

CUPRINS

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Prefață</i> | 3 |
| Capitolul I — Elemente de logică | 5 |
| § 1. Propoziții. Operații cu propoziții | 5 |
| § 2. Cîteva proprietăți uzuale privind calculul cu propoziții | 8 |
| § 3. Exerciții privind calculul cu propoziții | 8 |
| § 4. Predicate. Operații cu predicate. Propoziții universale. Propoziții existențiale | 10 |
| § 5. Transcrierea proprietăților $P_1, \dots, P_9, P'_1, \dots, P'_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}$, din din § 1 și § 2 în cazul predicatelor | 11 |
| § 6. Propoziții cuantificate. Exerciții | 12 |
| § 7. Reguli de negare. Exerciții | 14 |
| Capitolul II — Elemente de teoria mulțimilor | 17 |
| § 1. Probleme care se rezolvă pe baza proprietăților calculului cu propoziții | 17 |
| § 2. Structura de algebră Boole a mulțimii părților unei mulțimi. Probleme care se rezolvă pe baza proprietăților de calcul într-o algebră Boole | 21 |
| § 3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul funcției caracteristice | 26 |
| § 4. Probleme de numărare | 29 |
| Capitolul III — Metoda inducției matematice | 31 |
| § 1. Varianta 1 | 31 |
| § 2. Varianta 2 | 38 |
| § 3. Varianta 3 | 40 |
| § 4. Șiruri definite prin recurență | 41 |
| Capitolul IV — Ecuații | 52 |
| § 1. Observații asupra ecuațiilor algebrice și a unor funcții polinomiale | 52 |
| § 2. Ecuația de gradul întâi | 59 |
| § 3. Ecuația de gradul doi cu o singură necunoscută | 65 |
| § 4. Ecuații algebrice de grad mai mare decît doi | 96 |
| § 5. Ecuații iraționale | 118 |
| § 6. Sisteme de două ecuații algebrice cu două necunoscute | 123 |
| Capitolul V — Inegalități | 135 |
| § 1. Generalități | 135 |
| § 2. Inegalități uzuale | 137 |
| § 3. Inegalități remarcabile | 139 |
| § 4. Aplicații | 144 |
| § 5. Inecuații | 154 |

*Coli de tipar 10. B.T. 21.9.1983.
Format 16/61×86. Apărut 1983.*

*I. P. „Oltenia“ Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România*

Plan 7241/171/1983

